سؤال ۱

فرض کنید $|z|=r$. از رابطه $z^n=\bar{z}$ به دست می‌آید

$$r^n=r$$

پس $r=0$ یا $r=1$

اگر $r=0$ به جواب $z=0$ می‌رسیم.

اگر $r=1$ در این صورت با توجه به اینکه $z\bar{z}=|z|^2=1$ خواهیم داشت

$$\bar{z}=z^{-1}$$

حال از رابطه $z^n=\bar{z}$ به دست می‌آید

$$z^{n+1}=1$$

جوابهای این معادله هم به صورت

$$z=\cos\frac{2k\pi}{n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{n+1}\quad,k=0,\dots,n$$

هستند پس کلاً $n+2$ جواب به دست می‌آوریم.

سؤال ۲

واضح است که $۰ < \sqrt[۳]{۶۴,۱} - ۴$

نشان می‌دهیم خطای محاسبه عبارت بالا از $۱۰^{-۲}$ کوچکتر است

$$\sqrt[۳]{۶۴,۱} - ۴ = \frac{۰/۱}{\sqrt[۳]{(۶۴,۱)^{۲}} + \sqrt[۳]{۶۴,۱} \times ۴ + ۴^{۲}}$$

$$< \frac{۰/۱}{۳ \times ۴^{۲}} = \frac{۱}{۴۸۰} < ۲ \times ۱۰^{-۳}$$

سؤال ۳

الف) برای هر n صحیح داریم: $f(\frac{1}{n}) = ۰$

از طرفی برای هر $\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n-1}$ ، $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = n-1$ و

$$f(x) = x - (n-1)$$

لذا

$$\lim_{x \to \frac{1}{n}^{+}} f(x) = 1 \neq f(\tfrac{1}{n})$$

پس تابع در نقطه $x = \frac{1}{n}$ پیوسته نیست.

ب) دو دنباله $p_n = \frac{1}{n}$ ، $q_n = \frac{1}{n + 1/2}$ که هر دو همگرا به صفر هستند را در نظر بگیرید.

$$f(q_n) = \frac{1}{2} \quad , \quad f(p_n) = ۰$$

بنابراین

$$۰ = \lim_{n \to \infty} f(p_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(q_n) = 1/2$$

در نتیجه حد مورد نظر وجود ندارد.

سؤال ۵

حالت اول:

$$h \le ۷۰ \Rightarrow \frac{h}{۱۰۰} \le \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \theta \le \sin^{-1} ۰/۷ \le \pi/۴$$

$$\Rightarrow |\theta - \pi/۴| \ge \pi/۴ - \sin^{-1} ۰/۷ \Rightarrow$$

نشان می‌دهیم سمت راست از $\alpha = ۴ \times ۱۰^{-۳}$ بزرگتر است. به طور معادل

$$\sin^{-1} ۰/۷ \le \pi/۴ - \alpha$$

$$\Leftrightarrow ۰/۷ \le \sin(\pi/۴ - \alpha) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos\alpha - \sin\alpha)$$

$$\Leftrightarrow ۰/۹۸ \le ۱ - ۲\sin\alpha\cos\alpha = ۱ - \sin ۲\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin ۲\alpha \le ۰/۰۲$$

و عبارت آخر به دلیل رابطه $\sin ۲\alpha \le ۲\alpha$ درست است.

حالت دوم:

$$h \ge ۷۱ \Rightarrow \frac{h}{۱۰۰} \ge \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \theta \ge \sin^{-1} ۰/۷۱ \ge \pi/۴$$

$$\Rightarrow \theta - \pi/۴ \ge \sin^{-1} ۰/۷۱ - \pi/۴$$

برای اینکه عبارت آخر بزرگتر از α باشد، باید نشان دهیم

$$\sin^{-1} ۰/۷۱ \ge \pi/۴ + \alpha \Leftrightarrow ۰/۷۱ \ge \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

$$\Leftrightarrow ۱/۰۰۸۲ \ge ۱ + \sin ۲\alpha$$

و نامساوی آخر از رابطه $\sin ۲\alpha \le ۲\alpha$ نتیجه می‌شود.

۵

سؤال ۴

(الف) با توجه به اینکه a_n بین a_{n-1} و a_{n-2} قرار دارد پس بازه‌ای که دو سر آن a_n و a_{n-1} هستند زیرمجموعه بازه‌ای است که دو سر آن a_{n-1} و a_{n-2} هستند در نتیجه

$$I_{n-1} \subseteq I_{n-2}$$

(ب) دقت کنید که $\text{طول } I_{n-1} = \frac{1}{2} \text{ طول } I_{n-2}$

بنابراین با استقرا به دست می‌آوریم $\text{طول } I_n = \frac{1}{2^n}$

در نتیجه طول I_n وقتی $n \to \infty$ برابر با صفر است، پس طبق یک صورت معادل از اصل تمامیت $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ برابر با یک مجموعه تک نقطه‌ای $\{\alpha\}$ است

با توجه به اینکه برای هر n داریم $\alpha \in I_n$ پس $|a_n - \alpha| \le \frac{1}{2^n}$

از رابطه اخیر هم به دست می‌آید $a_n \to \infty$ وقتی $n \to \infty$