

۱. فرض کنید تابع پیوسته $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به گونه‌ای باشد که معادله $f(x)^2 = x^2$ جواب نداشته باشد.

الف. نشان دهید f نه یک به یک است و نه پوشا.

ب. اگر f مشتق پذیر باشد نشان دهید اعداد a و b یافت می‌شوند به گونه‌ای که $f'(a) = 0$ و $f'(b) = 0.9$.



۲. گربه‌ای وسط نردبانی به طول ۴ متر که به درختی تکیه داده شده است، نشسته است. فردی پایه نردبان روی سطح زمین را با سرعت ۱ متر بر ثانیه از درخت دور می‌کند و گربه نیز با سرعت نیم متر بر ثانیه شروع به بالا رفتن از نردبان می‌کند. بیشترین ارتفاع گربه از سطح زمین را در هر یک از حالت‌های زیر محاسبه کنید.

الف. اگر در شروع فاصله پایه نردبان از درخت برابر ۲ متر باشد.

ب. اگر در شروع فاصله پایه نردبان از درخت برابر $2/5$ متر باشد.

۳. می‌خواهیم $\text{Arctan } 1/7$ را به کمک اطلاعات این تابع در $\sqrt{3}$ تقریب بزنیم.

الف. نشان دهید $\text{Arctan}'(x) = (1+x^2)^{-1}$.

ب. نشان دهید $0 < \sqrt{3} - 1/7 < 1/3$.

ج. با استفاده از تقریب خطی در $\sqrt{3}$ مقدار تقریبی $\text{Arctan } 1/7$ را محاسبه کنید و نشان دهید خطای آن از 10^{-4} کمتر است.

د. به کمک چند جمله‌ای تیلور از مرتبه مناسب تخمینی از $\text{Arctan } 1/7$ با خطای کمتر از 10^{-5} ارائه دهید.

موفق باشید