به نام او و برای او

تاریخ: ۱ آبان ۱۳۹۳
زمان : ۱۵۰ دقیقه
جمع نمره‌ها: ۶۰

پاسخ امتحان میان‌ترم اول ریاضی عمومی ۱

۱. [۲۰نمره] .

(آ) [۱۰نمره] .

جواب. فرض کنید $a_n = c_0/c_1c_2\cdots c_n$، که یک عدد گویای شناخته‌شده است و برابر $c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_n}{10^n}$ می‌باشد.

معنای اول. بسط اعشاری موردنظر برای هر $n \in \mathbb{N}$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$a_n \leq c_0/c_1c_2\cdots c_n \leq a_n + \frac{1}{10^n}.$$

یا به عبارت دیگر، در بازهٔ $[a_n, a_n + \frac{1}{10^n}]$ برای هر عدد طبیعی n قرار دارد. حال اصل اول تمامیت حکم می‌کند که اشتراک این بازه‌ها تک عضوی است. یا به عبارت دیگر، دقیقاً یک عدد وجود دارد که در تمام نامساوی‌های بالا صدق می‌کند. و این همان معنایی است که با دیدن نماد $c_0/c_1c_2\cdots$ به ذهن متبادر می‌شود.

معنای دوم. مجموعهٔ همهٔ a_nها را در نظر بگیرید. این بسط اعشاری یک کران بالا برای این مجموعه است. بنابر اصل دوم تمامیت این مجموعه کوچکترین کران بالا دارد که کاندیدای مناسبی برای معنای نماد $c_0/c_1c_2\cdots$ است.

(ب) [۱۰نمره] .

جواب. معنی نماد $0/999\cdots$ را می‌توان با هر یک از معناهای گفته‌شده در قسمت (الف) مشخص کرد. قرار دهید

$$a_n = \frac{9}{10}\frac{9}{100} + \cdots + \frac{9}{10} = 1 - \frac{1}{10^n}.$$

در معنای اول. دنبال یگانه عنصری می‌گردیم که دربازه‌های $[1 - \frac{1}{10^n}, 1]$ قرار دارد. عدد ۱ در همهٔ این بازه‌ها هست پس جواب است.

در معنای دوم. به مجموعهٔ a_nها نگاه می‌کنیم. عدد ۱ یک کران بالا برای این مجموعه است. باید نشان دهیم کوچکترین کران بالاست. با برهان خلف فرض کنید $1 - \alpha$ برای $\alpha > 0$ یک کران بالا باشد. بنابر گزاره‌ای در کتاب وجود دارد $n \in \mathbb{N}$ که $10^{-n} < \alpha$ پس $1 - \frac{1}{10^n} > 1 - \alpha$ ، که این تناقض با کران بالا بودن $1 - \alpha$ برای مجموعهٔ a_n هاست.

۲. [۲۰نمره] .

(آ) [۱۰نمره] .

جواب. داریم:

$$(\sqrt{\pi}-\sqrt{۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵})\underbrace{(\sqrt{\pi}+\sqrt{۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵})}_{A}=\underbrace{\pi-۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵}_{B}.$$

پس

$$\sqrt{\pi}-\sqrt{۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵}=\frac{B}{A}.$$

B خطای محاسبهٔ π با تقریب ۱۰ رقم اعشار است. پس $B\leq ۱۰^{-۱۰}$. از طرفی $A>۲\sqrt{۳}>۳$. بنابراین $\frac{B}{A}<\frac{۱}{۳\times ۱۰^{۱۰}}$

(ب) [۱۰نمره] .

جواب. a برابر حد دنباله‌ای از اعداد نامنفی است، بنابراین نامنفی است. دو حالت $a=۰$ و $a>۰$ را جداگانه بررسی می‌کنیم.

حالت اول ($a=۰$). برای هر $\epsilon>۰$ با توجه به این‌که $a_n\to ۰$، از جایی به بعد (یعنی nهای بزرگ‌تر از عددی مثل N) خواهیم داشت $a_n<\epsilon^۲$ و بنابراین $\sqrt{a_n}<\epsilon$ و چون $\sqrt{a_n}$ نامنفی است، پس $|\sqrt{a_n}|<\epsilon$. یعنی $\sqrt{a_n}\to ۰$.

حالت دوم ($a>۰$). از $a_n\to a$ نتیجه می‌شود که برای هر $\epsilon>۰$ از جایی به بعد $|a_n-a|<\epsilon\sqrt{a}$. اما داریم

$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}||\sqrt{a_n}+\sqrt{a}|=|a_n-a|.$$

بنابراین

$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|=\frac{|a_n-a|}{|\sqrt{a_n}+\sqrt{a}|}<\frac{\epsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}}<\epsilon,$$

و این یعنی $\sqrt{a_n}\to\sqrt{a}$.

۳. [۲۰نمره] .

(آ) [۵نمره] .

جواب. $u=A_۲-A_۱$ عدد مختلطی است که طول آن برابر $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ است (یعنی $|u|=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$) و زاویه‌اش با خط حقیقی ۴۰° است. پس جزء حقیقی و جزء موهومی u برابرند با $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\cos ۴۵^\circ$ و $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\sin ۴۵^\circ$ که هر دو برابرند با $\frac{۱}{۲}$ یعنی $u=\frac{۱+i}{۲}$.

(ب) [۵نمره] .

جواب. با توجه به اثر هندسی ضرب در اعداد مختلط، $\frac{A_n-A_{n-۱}}{A_{n-۱}-A_{n-۲}}$ عددی مختلطی است که طول آن (یعنی فاصله‌اش تا ۰) برابر با نسبت طول صورت به مخرج، یعنی برابر $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ است و زاویه‌اش با محور حقیقی تفاضل زاویهٔ عدد صورت با محور حقیقی و عدد مخرج با محور حقیقی است که برابر ۴۵° است. پس این نسبت همان u است. پس داریم:

$$(A_n-A_{n-۱})=u(A_{n-۱}-A_{n-۲})=u^۲(A_{n-۲}-A_{n-۳})=\cdots=u^{n-۱}.$$

بنابراین

$$A_n = A_۱ + (A_۲ - A_۱) + \cdots + (A_n - A_{n-۱}) = ۱ + u + \cdots + u^{n-۱}.$$

(پ) [۵نمره] .

جواب. چون $|z| < ۱$ ، پس $|z^{n+۱}| = |z|^{n+۱} \to ۰$ ، در نتیجه $z^{n+۱} \to ۰$. حال داریم:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{۱ - z^{n+۱}}{۱ - z} = \frac{۱}{۱ - z} \lim_{n\to\infty} (۱ - z^{n+۱}) = \frac{۱}{۱ - z}(۱ - \lim_{n\to\infty} z^{n+۱}) = \frac{۱}{۱ - z}$$

(ت) [۵نمره] .

جواب. از قسمت‌های (آ)، (ب)، و (پ) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} (۱ + u + \cdots + u^{n-۱}) = \frac{۱}{۱ - u} = \frac{۱}{۱ - (\frac{۱+i}{۲})} = \frac{۲}{۱ - i} = \frac{۲(۱ + i)}{(۱ - i)(۱ + i)} = ۱ + i$$