به نام خدا

ریاضیات عمومی ۱ | امتحان پایان ترم | تاریخ پنجشنبه ۱۹ دی ۱۳۹۲

مدت: ۳ ساعت

---

۱ نشان دهید برای هر $x \in [0, \frac{1}{2}]$ نامساوی $(1-x)e^{(x+x^2)} \geq 1$ برقرار است. (۲۰ نمره)

۲ نمودار تابع $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1+x}}$ را حول محور x ها دوران می‌دهیم.
حجم ناحیه تولید شده را بدست آورید. (۲۰ نمره)

۳ مقدار $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$ را با ذکر دلیل محاسبه کنید. (۲۰ نمره)

۴ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است بطوریکه $|f'(x)| \leq M$ برای هر $x \in \mathbb{R}$.
ثابت کنید:

الف) اگر برای $c \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(c) = 0$ آنگاه برای هر $h \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\left| \int_c^h f(x)\, \mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{2} M (h-c)^2$$

(۱۰ نمره)

ب) اگر برای $a < b$ داشته باشیم $f(a) = f(b) = 0$، آنگاه $\left| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{4} M (b-a)^2$ (۱۰ نمره)

۵ شعاع همگرایی سری توانی $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n\ln(n)}$ با متغیر حقیقی x را محاسبه کنید و همگرایی آن را در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه همگرایی بررسی کنید. (۲۰ نمره)

۶ تابع $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^2+1} \sin(e^t)\, \mathrm{d}t$ را در نظر می‌گیریم.

الف) مشتق f را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

ب) نشان دهید $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. (۱۰ نمره)

موفق باشید

1. نشان دهید برای هر $x\in[0,\frac{1}{2}]$ نامساوی $(1-x)e^{x+x^2}\geq 1$ برقرار است.

راه حل. تابع $f(x)=(1-x)e^{x+x^2}$ را در نظر می‌گیریم.

داریم $f(0)=1$ همچنین

$$f'(x)=x(1-2x)e^{x+x^2}$$

با توجه به اینکه $0\leq x\leq\frac{1}{2}$ داریم:

$$f'(x)\geq 0$$

بنابراین $f(x)$ بین $[0,\frac{1}{2}]$ صعودی است درنتیجه

$$\forall x\in[0,\tfrac{1}{2}]\quad f(x)\geq f(0)$$

$$\Rightarrow\quad f(x)\geq 1$$

2 نمودار تابع $f:[1,2]\to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{1+x}}$ را حول محور x ها دوران می‌دهیم. حجم ناحیه تولیدشده را بدست آورید.

راه حل

حجم ناحیه از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$V=\int_1^2 \pi\left(\frac{1}{x\sqrt{1+x}}\right)^2 dx=\int_1^2 \pi\frac{1}{x^2(1+x)}\,dx$$

دقت کنید که

$$\frac{1}{x^2(1+x)}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$$

بنابراین $\pi\left(-\frac{1}{x}-\ln(x)+\ln(1+x)\right)$ یک تابع اولیه است

$$\Rightarrow V=\pi\left(-\frac{1}{x}-\ln(x)+\ln(1+x)\right)\Big|_1^2$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}-2\ln(2)+\ln(3)\right)$$

$\boxed{۳}$ مقدار $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$ را با ذکر دلیل محاسبه کنید.

راه حل. داریم

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}}$$

که یک مجموع ریمان برای تابع $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ روی بازه $]0,1[$ است.

بنابراین مسئله منجر به محاسبه یک انتگرال ناسره می‌شود:

$$\int_{0^+}^{1^-}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

با تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$ نتیجه می‌شود

$$\int_{0^+}^{1^-}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=2\int_{0^+}^{1^-}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=2\operatorname{Arc\,sin}(t)\Big|_{0^+}^{1^-}=2\frac{\pi}{2}=\pi$$

4 فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است بطوریکه $|f'(x)|\leq M$ برای هر $x\in\mathbb{R}$
ثابت کنید (الف) اگر برای $c\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f(c)=0$ آنگاه، برای هر $h\in\mathbb{R}$ داریم

$$\left|\int_c^h f(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{2}M(h-c)^2$$

(ب) اگر برای $a<b$ داشته باشیم $f(a)=f(b)=0$ آنگاه

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{4}M(b-a)^2$$

اثبات: (الف) تابع

$$g(h)=\int_c^h f(x)\,dx$$

را درنظر می‌گیریم. طبق قضیه تیلور می‌توان نوشت:

$$g(h)=g(c)+g'(c)(h-c)+\frac{g''(d)}{2!}(h-c)^2$$

که d بین c و h است.

اما $g(c)=\int_c^c f(x)\,dx=0$ و $g'(c)=f(c)=0$ بنابراین رابطه بالا

به صورت زیر درمی‌آید:

$$g(h)=\frac{g''(d)}{2!}(h-c)^2$$

$$\rightarrow |g(h)| \leq \frac{M}{2}(h-c)^2$$

(ب) نقطه $h=\frac{b+a}{2}$ را درنظر می‌گیریم و دوبار از نامساوی قسمت (الف)

استفاده می‌کنیم:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \left|\int_a^h f(x)\,dx\right|+\left|\int_h^b f(x)\,dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}M(h-a)^2+\frac{1}{2}M(h-b)^2$$

$$=\frac{1}{2}M\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}M(b-a)^2$$

۵

شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n\ln(n)}$ با متغیر حقیقی x را محاسبه کنید

و همگرایی آن را در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه همگرایی بررسی کنید.

<u>راه حل</u> دقت کنید که

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{1}{n\ln(n)}} \right| = 1$$

بنابراین شعاع همگرایی آن برابر با یک است.

بنابراین سری روی بازه باز $]-1,1[$ مطلقاً همگرا است.

<u>همگرایی در $x=-1$</u>

به سری $\sum \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ می‌رسیم که یک سری متناوب لایب‌نیتس است و همگرا است.

<u>همگرایی در $x=1$</u>

به سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ می‌رسیم.

این سری با استفاده از آزمون انتگرال با مقایسه با $\int \frac{1}{x\ln(x)}dx$ واگرا می‌شود

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)} \geqslant \int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx = \ln(\ln(x))\Big|_2^{\infty} = \infty$$

ریز نمره

٦

تابع $f(x)=\int_{x^2}^{x^2+1}\sin(e^t)\,dt$ را در نظر می‌گیریم.

الف) مشتق f را محاسبه کنید.

ب) نشان دهید $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

<u>راه حل</u> (الف) طبق قاعده لایب نیتس داریم:

$$f'(x)=\sin\left(e^{x^2+1}\right)(2x)-\sin\left(e^{x^2}\right)(2x)$$

ب) داریم

$$\int_{x^2}^{x^2+1}\sin(e^t)\,dt=\int_{x^2}^{x^2+1}\left(-e^{-t}\right)\left(\cos e^t\right)'\,dt$$

$$\underset{\text{جزء به جزء}}{=}-e^{-t}\cos e^t\Big|_{x^2}^{x^2+1}-\int_{x^2}^{x^2+1}e^{-t}\cos e^t\,dt$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\int_{x^2}^{x^2+1}\sin(e^t)\,dt=\lim_{x\to\infty}\left(-e^{-(x^2+1)}\cos\left(e^{x^2+1}\right)+e^{-x^2}\cos\left(e^{x^2}\right)\right)$$

$$-\lim_{x\to\infty}\int_{x^2}^{x^2+1}e^{-t}\cos e^t\,dt$$

جمله اول با توجه به کراندار بودن $\cos e^{x^2}$ و $\cos e^{x^2+1}$ و با توجه به اینکه $e^{-x^2}\to 0$ و $e^{-(x^2+1)}\to 0$ (وقتی $x\to+\infty$) به صفر میل می‌کند.

جمله دوم با توجه به اینکه $\cos e^t$ کراندار است و $e^{-t}\to 0$ وقتی $t\to+\infty$ به صفر میل می‌کند.

پس کلاً حد برابر با صفر است.