بسمه تعالی

راه حل سؤالات امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۱

پاییز ۱۳۹۰

راه حل سؤال ۱:

داریم:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a}{x} - \tan^{-1}\frac{b}{x}$$

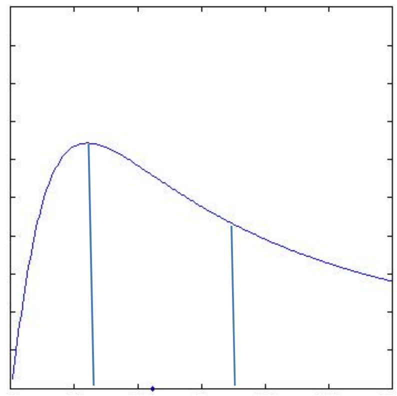
که در آن $a = \overline{AC} = 12$ و $b = \overline{BC} = 3$. پس $\frac{d\theta}{dx} = -\frac{a}{x^2+a^2} + \frac{b}{x^2+b^2}$. بنابر این مشتق θ صفر است اگر و تنها اگر $x^2 = ab$ یعنی $x = 6$. به علاوه:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{2ax}{(x^2+a^2)^2} - \frac{2bx}{(x^2+b^2)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow a(x^2+b^2)^2 > b(x^2+a^2)^2 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})x^2 > \sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+b+\sqrt{ab}) \\
&\Leftrightarrow x^2 > 6 \times 21 \Leftrightarrow x > 3\sqrt{14}
\end{aligned}$$

بنابراین دارمی $\theta''(6) < 0$. پس $x = 6$ یک ماکزیمم موضعی است. همچنین داریم

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \theta(x) = \tan^{-1}(+\infty) - \tan^{-1}(+\infty) = 0 \\
&\lim_{x\to +\infty} \theta(x) = \tan^{-1}(0) - \tan^{-1}(0) = 0
\end{aligned}$$

پس $x = 6$ ماکزیمم مطلق است.



راه حل سؤال ۲:

ابتدا معادلهٔ خط مماس بر نقطهٔ A به مختصات $(t, f(t))$ روی نمودار تابع را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{y - f(t)}{x - t} = f'(t)$$

این خط محور x ها را در نقطهٔ B قطع می‌کند. مختصات این نقطه به ازای $y = ۰$ در معادلهٔ فوق به‌دست می‌آید. بنابراین مؤلفهٔ x نقطهٔ B برابر است با $t - \frac{f(t)}{f'(t)}$.

چون فاصلهٔ B, H همواره برابر با مقدار ثابت a است، پس داریم:

$$\left| t - (t - \frac{f(t)}{f'(t)}) \right| = a$$

یا معادلاً

$$\left| \frac{f(t)}{f'(t)} \right| = a$$

چون تابع f پیوسته و f' همواره مخالف صفر است، پس $\frac{f}{f'}$ یک تابع پیوسته است (فرض می‌کنیم f' پیوسته است، هرچند نیازی نیست). پس رابطهٔ فوق معادل است با

$$\forall t: \frac{f(t)}{f'(t)} = a \text{ یا } \forall t: \frac{f(t)}{f'(t)} = -a$$

می‌دانیم تنها توابعی که در معادلهٔ $f'(t) = \lambda f(t)$ صدق می‌کنند، توابع به شکل $f(t) = ce^{\lambda t}$ ها هستند که c یک مقدار ثابت است. پس کلاً به دو دسته جواب $f(t) = ce^{-\frac{۱}{a}t}$ و $f(t) = ce^{\frac{۱}{a}t}$ می‌رسیم.

توجه کنید که c ناصفر است.

راه حل سؤال ۳:

باید ثابت کنیم انتگرال‌های زیر همگرا هستند:

$$II = \int_{۱}^{\infty} \frac{۱ - e^{-x^{۲}}}{x^{۲}} dx \text{ و } I = \int_{۰}^{۱} \frac{۱ - e^{-x^{۲}}}{x^{۲}} dx$$

برای اثبات همگرایی I، با استفاده از دستور هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱ - e^{-x^{۲}}}{x^{۲}} = \lim_{x\to ۰} \frac{۲xe^{-x^{۲}}}{۲x} = \lim_{x\to ۰} e^{-x^{۲}} = ۱$$

بنابراین تابع $\frac{۱ - e^{-x^{۲}}}{x^{۲}}$ روی بازهٔ $[۰,۱]$ کران‌دار است. این تابع پیوسته هم هست. بنابراین I همگرا است.

برای اثبات همگرایی II به وضوح داریم:

$$\forall x \geq ۱: \quad ۰ \leq \frac{۱ - e^{-x^{۲}}}{x^{۲}} \leq \frac{۱}{x^{۲}}$$

حال چون $\int_{۱}^{\infty} \frac{dx}{x^{۲}} = ۱$ همگرا است، پس II نیز همگرا است.

راه حل سؤال ۴:

برای $x \geq ۱$، $f(x) \geq ۰$ پیوسته و صعودی است. افراز $p = \{۱, ۲, \cdots, n\}$ از بازهٔ $[۱, n]$ را در نظر بگیرید. پس:

$$\sum_{i=۱}^{n-۱} m([i-۱, i]) \leq \int_a^b f \leq \sum_{i=۲}^{n} M([i-۱, i])$$

بنابراین $\sum_{k=۱}^{n-۱} f(k) \leq \int_۱^n f$ و $\int_۱^n f \leq \sum_{k=۲}^{n} f(k)$.

حال برای تابع $f(x) = \ln(x)$ داریم:

$$\begin{aligned}
& u = ۱ \quad , \quad v = \ln(x) \\
& \Rightarrow \int_۱^n ۱ \times ln(x) dx = x \ln x \Big|_۱^n - \int_۱^n dx = n \ln n - n + ۱
\end{aligned}$$

پس طبق قسمت قبل داریم

$$\sum_{k=۱}^{n-۱} \ln k \leq n \ln n - n + ۱ \leq \sum_{k=۲}^{n} \ln k$$

بنابراین از یک طرف:

$$\begin{aligned}
& \ln ۱ + \ln ۲ + \cdots + \ln(n-۱) \leq n \ln n - n + ۱ \\
& \Rightarrow \ln ۱ + \ln ۲ + \cdots + \ln n \leq (n+۱) \ln(n+۱) - (n+۱) + ۱ \\
& \Rightarrow \ln(n!) \leq \ln(n+۱)^{(n+۱)} - n \\
& \Rightarrow n! \leq (n+۱)^{(n+۱)} e^{-n}
\end{aligned}$$

و از طرف دیگر:

$$\begin{aligned}
& n \ln n - n + ۱ \leq \ln ۲ + \ln ۳ + \cdots + \ln n = \ln(n!) \\
& \Rightarrow n! \geq n^n e^{-n+۱}
\end{aligned}$$

و حکم ثابت می‌شود.

راه حل سوال ۵:

سری هندسی زیر برای $|x| \leq 1$ همگرا است:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

بنابراین طبق قضیه می‌توانیم از طرفین جمله به جمله انتگرال بگیریم:

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

به طور مشابه:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

با جمع زدن این دو رابطه داریم:

$$\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

حال چون همهٔ جملات این سری مثبت هستند، با در نظر گرفتن جملهٔ اول به دست می‌آوریم که $\ln(\frac{1+x}{1-x}) > 2x$ برای $0 < x < 1$. (روش دیگر: در نظر گرفتن تابع $f(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) - 2x$ و اثبات مثبت بودن مشتق آن، صعودی بودن آن و مقایسه با $f(0)$)

همچنین با قرار دادن $x = \frac{1}{2}$ در این نامساوی به دست می‌آوریم:

$$\ln(\frac{3/2}{1/2}) > 1 \Rightarrow \ln 3 > 1 \Rightarrow e < 3$$

راه حل سوال ۶:

الف) داریم:

$$۱ - a_n = \int_۰^۱ (۱ - \frac{۱}{۱ + x^n})dx = \int_۰^۱ \frac{x^n}{۱ + x^n} dx$$

از طرفی چون $x^n \leq \frac{x^n}{۱ + x^n} \leq ۰$، با انتگرال‌گیری به‌دست می‌آید $\frac{۱}{n + ۱} \leq ۱ - a_n \leq ۰$. پس $۱ - a_n \to ۰$.

ب) روش اول: قرار می‌دهیم $x^n = u$. بنابر این $nx^{n-۱}dx = du$. پس:

$$۱ - a_n = \frac{۱}{n}\int_۰^۱ \frac{u^{\frac{۱}{n}}}{۱ + u} du \Rightarrow n(۱ - a_n) = \int_۰^۱ \frac{u^{\frac{۱}{n}}}{۱ + u} du$$

از طرفی $\ln ۲ = \int_۰^۱ \frac{۱}{۱ + u} du$. بنابراین:

$$\ln ۲ - n(۱ - a_n) = \int_۰^۱ \frac{۱ - u^{\frac{۱}{n}}}{۱ + u} du$$

داریم $۱ - u^{\frac{۱}{n}} \leq \frac{۱ - u^{\frac{۱}{n}}}{۱ + u} \leq ۰$ پس با انتگرال گیری از دو طرف به‌دست می‌آید

$$۰ \leq \ln ۲ - n(۱ - a_n) \leq ۱ - \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{n}}$$

بنابراین $\ln ۲ - n(۱ - a_n) \to ۰$ و حکم ثابت می‌شود.

روش دوم: اثبات نامساوی $۱ - x^n \leq \frac{۱}{۱ + x^n} \leq ۱$ و انتگرال‌گیری از طرفین؛ سپس محاسبهٔ حد طرفین.

روش سوم: از فرمول جزء به جزء به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$\frac{۱ - a_n}{۱ / n} = \int_۰^۱ \frac{nx^n}{۱ + x^n} dx = x \ln(۱ + x^n)\Big|_۰^۱ - \int_۰^۱ \ln(۱ + x^n)dx$$

سپس از طرفین نامساوی $\ln(۱ + x^n) \leq x^n$ انتگرال می‌گیریم و در رابطهٔ فوق جایگذاری می‌کنیم. سپس حد آن را محاسبه می‌کنیم.

ج) با استفاده از قسمت ب به دست می‌آوریم از جایی به بعد $۱ - a_n \geq \frac{\ln ۲}{۲} \times \frac{۱}{n}$ و از واگرایی سری $\sum_n \frac{۱}{n}$ نتیجه می‌شود که سری $\sum_n ۱ - a_n$ واگرا است.