

به نام خدا

ریاضیات عمومی ۱

امتحان میان ترم اول

مدت:  $2\frac{1}{4}$  ساعت

تاریخ پنجشنبه ۱۹ آبان ۱۳۹۰

- ۱ الف) همه جواب های معادله  $z^2 + z + 1 = 0$  را در مجموعه اعداد مختلط  $\mathbb{C}$  بیابید. (۵ نمره)  
 ب) همه جواب های معادله  $z^6 + z^3 + 1 = 0$  را در مجموعه اعداد مختلط  $\mathbb{C}$  بیابید. (۵ نمره)

- ۲ عدد صحیح  $\alpha \geq 0$  داده شده است. تابع  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $f(x) = |x|^\alpha \sin |x|$  را در نظر می گیریم (برای  $\alpha = 0$ ،  $|x|^\alpha$  را برای هر  $x$  برابر 1 در نظر می گیریم). با ذکر دلیل همه نقاط پیوستگی و مشتق پذیری  $f$  را (بر حسب مقادیر مختلف  $\alpha$ ) مشخص کنید. (۱۰ نمره)

- ۳ فرض کنید  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد به طوری که  $f(0) = 1$  و  $f(1) = 0$ . نشان دهید عدد  $c \in ]0, 1[$  چنان موجود است که  $f(c) = c$ . (۱۰ نمره)

- ۴ دو تابع مشتق پذیر  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  و  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  مفروضند به طوری که برای هر  $x \in \mathbb{R}$  در شرایط زیر صدق می کنند:

$$(*) \quad \begin{cases} f'(x) = g(x), & g'(x) = -f(x), \\ f(0) = 0, & g(0) = 1. \end{cases}$$

- الف) ثابت کنید برای هر  $x \in \mathbb{R}$  داریم  $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ . (۵ نمره)  
 ب) فرض کنید  $f_0$  و  $g_0$  دو تابع دلخواه باشند که در روابط  $(*)$  صدق می کنند. ثابت کنید برای هر  $x \in \mathbb{R}$  داریم  $f_0(x) = f(x)$  و  $g_0(x) = g(x)$ . (۵ نمره)

- ۵ فرض کنید  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  یک تابع پیوسته باشد به طوری که روی  $]0, 1[$  مشتق پذیر باشد و همچنین عدد  $L$  چنان موجود است که  $|f'(x)| \leq L < 1$  برای هر  $x \in ]0, 1[$ .  
 الف) ثابت کنید معادله  $f(x) = x$  روی  $[0, 1]$  دارای جوابی یگانه مانند  $s$  است. (۵ نمره)  
 ب) نقطه دلخواه  $a \in [0, 1]$  را در نظر می گیریم. دنباله  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x_0 = a, x_1 = f(x_0), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$$

- ثابت کنید دنباله  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  به  $s$  همگراست. (۵ نمره)

موفق باشید