۱. فرض کنید f تابعی مشتق پذیر باشد. تابع $|f|$ در چه نقاطی مشتق پذیر است؟

۲. فرض کنید حد $\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n$ را e بنامیم. با استفاده از تعریف مشتق نشان دهید $(e^x)'=e^x$.

۳. ثابت کنید به ازای x های به اندازهٔ کافی نزدیک به صفر، داریم $۱-\frac{x^۲}{۲}\le\cos(x)\le۱-\frac{x^۲}{۴}$.

۴. ثابت کنید به ازای $x\in[۰,\frac{\pi}{۲}]$ داریم $\sin(x)\ge\frac{۲}{\pi}x$.

۵. فرض کنید $f(x)=\arctan(x)$. ثابت کنید برای هر $n\ge۲$ داریم

$$(۱+x^۲)f^{(n)}(x)+۲(n-۱)xf^{(n-۱)}(x)+(n-۲)(n-۱)f^{(n-۲)}(x)=۰$$

به علاوه نشان دهید که

$$f^{(۲m)}(۰)=۰,\quad f^{(۲m+۱)}(۰)=(-۱)^m(۲m)!$$

۶. حد زیر را حساب کنید

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(tg(x))-tg(\sin(x))}{\arcsin(arctg(x))-arctg(\arcsin(x))}$$

۷. ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{۱}{x}} & ,x>۰\\ ۰ & ,x\le۰\end{cases}$ بی نهایت بار مشتق پذیر است.

۸. برای یک تابع سه بار مشتق پذیر مثل f که $f'(۰)\neq۰$، **مشتق شوارتز** f به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathfrak{D}(f)=\frac{f'''(x)}{f'(x)}-\frac{۳}{۲}(\frac{f''(x)}{f'(x)})^۲$$

a. نشان دهید

$$\mathfrak{D}(fog)=(\mathfrak{D}f\ og).(g')^۲+\mathfrak{D}g$$

b. اگر $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ که $ad-bc\neq۰$، آنگاه $\mathfrak{D}f=۰$.

۹. فرض کنید f پیوسته و از راست مشتق پذیر باشد و مشتق راست آن نیز پیوسته باشد. ثابت کنید f مشتق پذیر است.

۱۰. فرض کنید f تابعی مشتق پذیر باشد. f را به طور یک نواخت مشتق پذیر می گوییم هرگاه به ازای هر $\epsilon>۰$، $\delta>۰$ ای موجود باشد که برای هر x و هر $-\delta<h<\delta$ داشته باشیم

$\mid \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \mid < \epsilon$. ثابت کنید f روی بازهٔ $[a,b]$ به طور یک نواخت مشتق پذیر است اگر و تنها اگر f' نیز پیوسته باشد.

۱۱. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی محدب باشد. ثابت کنید f در همهٔ نقاط پیوسته است و مشتق راست دارد.

۱۲. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ محدب و کران دار باشد. ثابت کنید f ثابت است.

۱۳. فرض کنید به ازای هر $x,y\in[a,b]$ تنها یک $c\in(x,y)$ موجود باشد که $f'(c)=\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$. ثابت کنید f محدب یا مقعر است.

۱۴. فرض کنید f تابعی دو بار مشتق پذیر باشد که $f(۰)=۰$ و $f(۱)=۱$ و $f(۲)=۲$. ثابت کنید $x\in(۰,۲)$ موجود است که $f''(x)=۰$.

۱۵. فرض کنید $\dfrac{a_n}{n+۱}+\dfrac{a_{n-۱}}{n}+\ldots+a_۰=۰$. ثابت کنید چند جمله ای $a_nx^n+\ldots+a_۰$ ریشه ای در بازهٔ $(۰,۱)$ دارد.

۱۶. فرض کنید f تابعی مشتق پذیر روی یک بازه باشد و $f(a)=f(b)$. ثابت کنید برای هر عدد حقیقی a، $x\in(a,b)$ وجود دارد که $\alpha f(x)+f'(x)=۰$.

۱۷. **قضیهٔ مقدار میانگین لاگرانژ:** فرض کنید f,g دو تابع مشتق پذیر روی بازهٔ $[a,b]$ باشند و $g(a)\neq g(b)$. ثابت کنید $c\in(a,b)$ موجود است که

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

۱۸. **قضیهٔ هوپیتال:** فرض کنید f,g دو تابع مشتق پذیر در یک بازه باشند و $f(a)=g(a)=۰$. ثابت کنید اگر $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ نیز موجود است و با آن برابر است. (راهنمایی: از قضیهٔ قبل استفاده کنید)

۱۹. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد به طوری که $\lim\limits_{h\in\mathbb{Q},,h\to۰}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ موجود باشد. ثابت کنید f در نقطهٔ a مشتق پذیر است.

۲۰. تمام اعداد طبیعی a,b را بیابید که $a^b=b^a$ (راهنمایی: تابع $f(x)=\dfrac{ln(x)}{x}$ را در نظر بگیرید).

۲۱. الف) قرار دهید $f(۰) = \frac{۱}{۲}$ و $f(x) = \frac{۱ - \cos(x)}{x^{۲}}$. $f^{(۲۰)}(۰)$ را به دست آورید.

ب) قرار دهید $f(x) = \frac{۱}{۱ + ۲x + \ldots + ۱۳۸۹x^{۱۳۸۸}}$. $f^{(۱۳۸۹)}(۰)$ را بیابید.

۲۲. الف) فرض کنید f تابعی سه بار مشتق پذیر روی $[۰,۱]$ باشد و $f(۰) = f'(۰) = f''(۰) = ۰$ و $f(۱) = ۱$. ثابت کنید $c \in (۰,۱)$ موجود است که $f'''(c) = ۶$.

ب) به علاوه، فرض کنید $f'(۱) = f''(۱) = ۰$. ثابت کنید $c \in (۰,۱)$ موجود است که $f'''(c) \geq ۲۴$.

۲۳. فرض کنید $f^{(n+۱)}$ در همهٔ نقاط موجود و ناصفر باشد. طبق قضیهٔ تیلور، خطای بسط تیلور درجهٔ $n-۱$ برای $f(x+h)$ برابر است با $\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta)$ که $۰ \leq \theta \leq h$. θ را به عنوان تابعی از h در نظر بگیرید. ثابت کنید $\lim\limits_{h \to ۰} \frac{\theta}{h} = ۰$.

۲۴. فرض کنید $f : [۰,\infty) \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد که $f(۰) = ۱$ و $f'(x) \geq f(x)$. ثابت کنید $f(x) \geq e^x$.

۲۵. فرض کنید f, g توابع مشتق پذیر و غیر ثابتی باشند که $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$ و $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$ و همچنین $f'(۰) = ۰$. ثابت کنید $f(x)^{۲} + g(x)^{۲} = ۱$.

۲۶. فرض کنید تابع f سه بار مشتق پذیر باشد. ثابت کنید

$$f'''(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+۳h) - ۳f(x+۲h) + ۳f(x+h) - f(x)}{h^{۳}}$$

آیا می توانید برای مشتقات مرتبهٔ بالاتر نیز عبارت مشابهی بیان کنید؟

۲۷. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی سه بار مشتق پذیر باشد و f''' پیوسته باشد. ثابت کنید a وجود دارد که

$$f(a)f'(a)f''(a)f'''(a) \geq ۰$$

مراجع:

کتاب ریاضی عمومی Spivak

Problems in Real Analysis, Andreescu

Problems in Mathematical Analysis, II, Kaczor