مسائل زیر بر حسب موضوع دسته بندی شده اند و لزوماً به ترتیب سختی نیستند.
برای گرفتن راهنمایی و یا بررسی درست بودن راه حلتان، در زمان های رفع اشکال به آقایان مرتضی، فیلم، کمالی نژاد، زمانی یا خزلی مراجعه کنید.

۱. فرض کنید $a_n \to a$. قرار دهید $b_n := \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. ثابت کنید $b_n \to a$.

۲. $a_1, \ldots, a_k$ را اعدادی مثبت بگیرید و قرار دهید $b_n := \sqrt[n]{a_1^n + \ldots + a_k^n}$. $\lim_{n\to\infty} b_n$ را بر حسب $a_1, \ldots, a_k$ به دست آورید.

۳.

أ) فرض کنید f_1 و f_2 دو تابع پیوسته باشند. نشان دهید $\max\{f_1(x), f_2(x)\}$ و $\min\{f_1(x), f_2(x)\}$ نیز پیوسته اند.

ب) فرض کنید f_1 و f_2 و f_3 پیوسته باشند. $g(x)$ را برابر با آن عددی از بین $f_1(x)$ و $f_2(x)$ و $f_3(x)$ بگیرید که بین دو تای دیگر قرار دارد. ثابت کنید g نیز پیوسته است.

۴. فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد. ثابت کنید تابع $g(x) := \max\{f(y) : a \leq y \leq x\}$ نیز پیوسته است.

۵. ثابت کنید معادلهٔ $x = \cos(x)$ دقیقاً یک ریشه دارد. معادلهٔ $x = \tan(x)$ چه طور؟

۶. فرض کنید $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی صعودی باشد که I یک بازه است. ثابت کنید اگر $f(I)$ نیز یک بازه باشد، آن گاه f پیوسته است.

۷. فرض کنید تابع پیوسته $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ هر بازه باز را به یک بازه باز میبرد (یعنی برای هر بازهٔ باز I، مجموعهٔ $\{f(x) : x \in I\}$ یک بازهٔ باز است). نشان دهید که f حتماً تابعی یکنوا است.

۸. ثابت کنید هر چند جمله ای به شکل $f(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_0$ می نیمم خود را می گیرد.

۹. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته و متناوب باشد. ثابت کنید f ماکزیمم خود را می گیرد و هم چنین پیوستهٔ یک نواخت است.

۱۰.

أ) نشان دهید تابع پیوسته ای وجود ندارد که هر $a \in \mathbb{R}$ را دقیقا n بار بگیرد که n عدد زوجی است.

ب) برای هر n فرد تابع پیوسته ای بسازید که هر عدد حقیقی را n بار بگیرد.

۱۱. نشان دهید تابع با ضابطه زیر در نقاط گویا ناپیوسته است و در نقاط گنگ پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{n} & if\ x=\frac{m}{n}, m\geq ۰, (m,n)=۱\\ ۰ & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$$

۱۲. فرض کنید $a_۱ < b_۱ < a_۲ < b_۲ < \ldots < a_n < b_n$. ثابت کنید همهٔ ریشه های چند جمله ای زیر حقیقی اند

$$P(x)=\Big[(x+a_۱)\ldots(x+a_n)\Big]+۲\Big[(x+b_۱)\ldots(x+b_n)\Big]$$

۱۳. فرض کنید $K\subseteq\mathbb{R}^۲$ یک زیر مجموعهٔ محدب و کران دار باشد.

أ) ثابت کنید خطی وجود دارد که هم محیط و هم مساحت K را نصف کند.

ب) ثابت کنید هر دو خطی که مساحت (یا محیط) K را نصف کنند، در داخل K یکدیگر را قطع می کنند.

ج) ثابت کنید برای هر دو شکل محدب کران دار داده شده در $\mathbb{R}^۲$، خطی هست که محیط (یا مساحت) هر دو را نصف می کند.

د) ثابت کنید دو خط عمود بر هم هستند که محیط (یا مساحت) K را به چهار قسمت مساوی تقسیم می کنند.

۱۴. فرض کنید $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ طوری باشند که $f(g(x))=g(f(x))$ و معادلهٔ $f(f(x))=g(g(x))$ جواب داشته باشد. ثابت کنید معادلهٔ $f(x)=g(x)$ نیز جواب دارد.

۱۵. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی باشد که $f(f(x))=-x$. ثابت کنید f نمی تواند پیوسته باشد.

۱۶.

أ) $\alpha\in[۰,۱]$ را عددی ثابت بگیرید. چه وقت می توان گفت که به ازای هر تابع پیوستهٔ $f:[۰,۱]\to\mathbb{R}$، لزوماً x ای وجود دارد که $f(x)=f(x+\alpha)$؟ (مسئلهٔ ۲.۳.۱۰ را ببینید)

ب) ثابت کنید همواره x ای وجود دارد که حد اقل یکی از دو رابطهٔ $f(x)=f(x+\alpha)$ یا $f(x)=f(x+۱-\alpha)$ بر قرار باشند.

۱۷.

أ) فرض کنید تابع $f:[۰,۱)\to\mathbb{R}$ پیوستهٔ یک نواخت باشد نشان دهید حد $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ موجود است.

ب) فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوستهٔ یک نواخت باشد. ثابت کنید اعداد حقیقی a و b موجود اند که $|f(x)|\leq a|x|+b$.

ج) فرض کنید $S \subset [۰,۱]$ و $f : S \to \mathbb{R}$ تابعی پیوستهٔ یک نواخت باشد. ثابت کنید تابع پیوستهٔ $F : [۰,۱] \to \mathbb{R}$ یافت می شود که برای هر $x \in S$ داشته باشیم $F(x) = f(x)$.

۱۸. فرض کنید $f : (\mathbb{Q} \cap [۰,۱]) \to \mathbb{R}$ تابعی صعودی باشد. ثابت کنید تابع $F(x) := \inf_{y>x}\{f(y)\}$ تابعی صعودی و از راست پیوسته است. به علاوه F در نقاط گنگ پیوسته است.

۱۹. ثابت کنید هر دنبالهٔ نا متناهی مثل $x_۱, x_۲, \ldots$ در بازهٔ $[۰,۱]$ یک زیر دنبالهٔ هم گرا دارد. یعنی اندیس های $n_۱ < n_۲ < \ldots$ موجود اند که دنبالهٔ $x_{n_۱}, x_{n_۲}, \ldots$ هم گرا است (مسئلهٔ ۲.۴.۱۲ را ببینید).

۲۰. با استفاده از مسئلهٔ قبل، اثبات دیگری از قضیهٔ ۲.۴.۱ ارائه دهید (راهنمایی: یک دنباله مثل $x_۱, x_۲, \ldots$ در نظر بگیرید که $f(x_i) \to \sup f$).

۲۱. مشابه گزارهٔ ۲.۲.۱، تعریف دیگری از نیم پیوستگی با استفاده از دنباله ها ارائه دهید و مشابه مسئلهٔ قبل اثبات دیگری از قضیهٔ ۲.۴.۲ بیابید.

تعریف: مربع واحد $I := [۰,۱] \times [۰,۱]$ را در نظر بگیرید. یک تابع $f : I \to \mathbb{R}$ را **پیوسته** می نامیم، هر گاه برای هر $(x_۰, y_۰) \in I$ و هر $\epsilon > ۰$، یک $\delta > ۰$ یافت شود که اگر $\sqrt{(x - x_۰)^۲ + (y - y_۰)^۲} < \delta$، آن گاه $| f(x,y) - f(x_۰, y_۰) | < \epsilon$.

۲۲. ثابت کنید هر تابع پیوسته (یا حتی نیم پیوسته از بالا) مثل $f : [۰,۱] \times [۰,۱] \to \mathbb{R}$ ماکزیمم و می نیمم خود را می گیرد. یک بار به روشی مشابه اثبات قضیهٔ ۲.۴.۱ و یک بار به روشی مشابه مسئلهٔ ۲۱ ثابت کنید.

۲۳. فرض کنید $f : [۰,۱] \times [۰,۱] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد.

أ) تابع کنید برای هر $x \in [۰,۱]$ تابع $f_x(y) := f(x,y)$ پیوسته است.

ب) ثابت کنید تابع $g(x) := \max\{f(x,y) : y \in [۰,۱]\}$ پیوسته است. به این ترتیب اثبات دیگری از مسئلهٔ قبل ارائه دهید.

ج) در صورتی که f نیم پیوسته باشد چه طور؟

۲۴. فرض کنید $f(x,t)$ که در آن $x, t \in [۰,۱]$ تابعی پیوسته باشد. $c \in \mathbb{R}$ را عددی ثابت بگیرید. t را به عنوان متغیر زمان در نظر بگیرید و $g(x)$ را به صورت زیر برابر با اولین زمان برخورد با c تعریف کنید:

$$g(x) := \inf\{t : f(x,t) = c\}$$

در صورتی که مجموعهٔ داخل $\inf$ تهی باشد، $g(x)$ را برابر با ۲ تعریف کنید.

أ) ثابت کنید در صورتی که مجموعهٔ داخل $\inf$ نا تهی باشد، اینفیمم تبدیل به مینیمم می شود.

ب) ثابت کنید g تابعی نیم پیوسته از پایین است.

۲۵.فرض کنید $\lim_{x\to 0}(f(x)+f(\frac{1}{x}))=2$. ثابت کنید $\lim_{x\to 0}f(x)=1$.

۲۶.فرض کنید $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ تابعی باشد که برای هر $a>0$ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty}f(\frac{a}{2^n})=0$. آیا می توان نتیجه گرفت $\lim_{x\to 0}f(x)=0$؟

۲۷.با یک مثال نشان دهید که از شرط $\lim_{x\to 0}(f(x)+f(2x))=0$ نمی توان نتیجه گرفت که f در 0 حد دارد. نشان دهید اگر شرط $f(x)\geq\varphi(x)$ نیز بر قرار باشد که $\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0$، آنگاه می توان نتیجه گرفت $\lim_{x\to 0}f(x)=0$.

۲۸.فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی صعودی باشد که $\lim_{x\to\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1$. ثابت کنید برای هر $c>0$ نیز $\lim_{x\to\infty}\frac{f(cx)}{f(x)}=1$.

۲۹.فرض کنید $\lim_{x\to 0}f(x)=0$ و $\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=0$. ثابت کنید $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

۳۰.تعریف کنید $f(x^+):=\lim_{y\to x^+}f(y)$ و $f(x^-):=\lim_{y\to x^-}f(y)$. فرض کنید f تابعی صعودی باشد.

أ) ثابت کنید $f(x^+)$ موجود است و $f(x^+)=\inf_{y>x}f(y)$. حکم مشابهی را برای $f(x^-)$ ثابت کنید. هم چنین ثابت کنید $f(x^-)\leq f(x)\leq f(x^+)$

ب) ثابت کنید $\lim_{x\to x_0^+}f(x^-)=f(x_0^+)$ و $\lim_{x\to x_0^-}f(x^+)=f(x_0^-)$.

مراجع.

۱. کتاب آنالیز **Pugh**

۲. کتاب ریاضی عمومی **Spivak**

۳. تمرینهای سالهای گذشته

۴. کتاب **Problems in mathematical Analysis**، جلد دوم، نوشتهٔ **Kaczor** و **Nowak**