بسمه تعالی

تمرینات تکمیلی فصل اول ریاضی عمومی ۱

حل سوالات فوق به افرادی توصیه می‌شود که بر مطالب کتاب درسی و تمرین‌های آن تسلط داشته باشند و نیازمند تمرین بیشتر باشند. لذا حل این سوال‌ها خارج از برنامه کلاس حل‌تمرین است. برای راهنمایی و جواب سوالات فوق می‌توانید در ساعات رفع اشکال به آقایان خزلی، کمالی‌نژاد و مرتضی رجوع کنید.

۱. عدد $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. دنباله $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ را طوری تعریف کنید که داشته باشیم:

$$x = [x] + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = [x_1] + \frac{1}{x_2}, \ldots, \quad x_{n-1} = [x_{n-1}] + \frac{1}{x_n}, \ldots$$

آنگاه داریم:

$$x = [x] + \cfrac{1}{[x_1] + \cfrac{1}{[x_2] + \cfrac{1}{\ddots + [x_{n-1}] + \cfrac{1}{x_n}}}}$$

نشان دهید x گویا است اگر و فقط اگر وجود داشته باشد $n \in \mathbb{N}$ به گونه ای که $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ عددی صحیح باشد.

۲. الف) فرض کنید $I_۱ \supseteq I_۲ \supseteq \ldots$ دنباله ای از بازه های بستهٔ تو در تو باشند. ثابت کنید اشتراک این بازه ها نیز یک بازهٔ بسته (و بنابراین ناتهی) است که طول آن برابر با حد طول این بازه ها است.

ب) آیا اشتراک دنباله ای از بازه های باز تو در تو می تواند تهی باشد؟

۳. α را عددی گنگ و مجموعه A را به صورت $A = \{m\alpha + n : m,n \in \mathbb{Z}\}$ زیر در نظر بگیرید.نشان دهید مجموعه A در اعداد حقیقی چگال است بدین معنی که در هر بازه $a,b \in \mathbb{R}$ (a,b) عضوی از مجموعه A وجود دارد.

۴. دنباله $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ را به صورت $x_n = \sin(n), \quad n \in \mathbb{N}$ تعریف می کنیم. نشان دهید دنباله مذکور واگرا است. سوپریمم اعضای این دنباله را نیز حساب کنید.

۵. عدد $\alpha \in (0,2)$ در نظر بگیرید. دنباله $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ را به صورت

$$x_{n+1} = \alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1}, \qquad n \geq 1$$

حد دنباله فوق را برحسب $\alpha,\ x_0,\ x_1$ به دست آورید.

۶. دنباله اعداد حقیقی $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ در شرطهای $\lim_{n\to\infty}(x_{2n}+x_{2n+1})=1389$ و $\lim_{n\to\infty}(x_{2n}+x_{2n-1})=2010$ صدق می کند. حد زیر را حساب کنید

$$\lim_{n\to\infty}\left({}^{x_{2n}}\!/_{x_{2n+1}}\right)$$

۷. دنباله $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ از اعداد حقیقی را در نظر بگیرید به طوری که داشته باشیم $\lim_{n\to\infty}(2x_n-x_{n-1})=a$ ثابت کنید $\lim_{n\to\infty}x_n=a$

۸. "**سوپریمم حدی**" یک دنبالهٔ $a_۱, a_۲, \ldots$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\sup\{a_n, a_{n+۱}, \ldots\})$$

الف) سوپریمم حدی دنباله های $a_n = \frac{۱}{n}$ و $a_n = (-۱)^n(۱+\frac{۱}{n})$ را حساب کنید.

ب) نشان دهید سوپریمم حدی دنبالهٔ $a_۱, a_۲, \ldots$ وجود دارد اگر و تنها اگر این دنباله کران دار باشد و $a_n \not\to -\infty$. در صورتی که این طور نباشد، سوپریمم حدی را باید چه طور تعریف کنیم؟

د) ثابت کنید در صورتی که سوپریمم حدی دو دنبالهٔ $a_۱, a_۲, \ldots$ و $b_۱, b_۲, \ldots$

ج) "**اینفیمم حدی**" یک دنباله را نیز به طور مشابه تعریف کنید. ارتباط این دو تعریف را با یک فرمول بیان کنید. قسمت (الف) و (ب) را برای اینفیمم حدی نیز انجام دهید

د) نشان دهید $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$ و تساوی تنها وقتی برقرار است که دنباله همگرا باشد.

۹. نشان دهید اگر اعداد مختلط a و b داخل دایرهٔ واحد باشند، آنگاه $|\frac{a-b}{۱-\overline{a}b}|<۱$.

۱۰. فرض کنید z_1, z_2, z_3, z_4 چهار نقطه از صفحه مختلط باشند. نشان دهید هر چهار نقطه روی یک خط یا یک دایره قرار دارند اگر و تنها اگر $\frac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_3-z_2)(z_4-z_1)}$ عددی حقیقی باشد.

۱۱. فرض کنید $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$ ثابت کنید ریشه های چندجمله ای

$$z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0 = 0$$

در درون دایره ای به مرکز مبدا و شعاع $\sqrt{1+|c_{n-1}|^2+\ldots+|c_0|^2}$ قرار دارند.

۱۲. برای هر دو عدد حقیقی x و y و هر عدد طبیعی n نشان دهید

الف) $$\sum_{k=۰}^{n} \sin(y+kx) = \frac{\sin\left(\frac{n}{۲}x\right)\sin\left(\frac{n+۱}{۲}x+y\right)}{\sin\left(\frac{x}{۲}\right)}$$

ب) $$\sum_{k=۰}^{n} \cos(y+kx) = \frac{\cos\left(\frac{n}{۲}x\right)\sin\left(\frac{n+۱}{۲}x+y\right)}{\sin\left(\frac{x}{۲}\right)}$$

۱۳. نشان دهید سه عدد مختلط x, y, z رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع هستند اگر و تنها اگر

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = xy + xz + yz$$

۱۴. مرکز و شعاع دایرهٔ گذرنده از سه عدد مختلط x, y, z را به صورت فرمول متقارنی از این سه عدد بیابید.

۱۵. فرض کنید برای $k = 1, 2, .., n$ داشته باشیم $|z_k| = 1$. نشان دهید:

$$\max\left(\prod_{k=1}^{n} |z - z_k|\right) \geq 2$$

که در آن ماکزیمم روی نقاطی گرفته می شود که $|z| = ۱$. نشان دهید تساوی اتفاق می افتد اگر و تنها اگر $z_1, z_2, ..., z_n$ رئوس یک n ضلعی منتظم باشند.

مراجع:

۱. مجموعه تمرینات تالیفی حسین مشتاق

2. w. J. Kaczor Problems in Mathematical Analysis I.

3. Teodora-Liliana Radulescu, Vicentiu D. Radulescu, and Titu Andreescu, Problems in Real Analysis.

4. Charles Chapman Pugh, Real Mathematical Analysis.

5. Lars V. Ahlfors, Complex Analysis.