

بسمه تعالی

اعداد مختلط و هندسه

مسئله های زیر برای تمرین بیش تر در موضوع اعداد مختلط قرار داده شده اند. در مسائل ۱، ۲، ۷، ۸ و ۱۰ برخی روابط بین اعداد مختلط و هندسه مسطحه بیان شده است. در مسئله های دیگر از این روابط برای حل بعضی مسئله های هندسه استفاده می شود. سطح اغلب این مسائل ساده و یا متوسط است. ترتیب آن ها نیز تقریباً از ساده به سخت است. لازم به ذکر است که حل این مسائل برای درس ریاضی عمومی ۱ ضروری نیست و صرفاً برای مطالعه بیشتر، به خصوص برای دانشجویان رشته ریاضی، قرار داده شده اند.

۱. ثابت کنید دو مثلث $z_1 z_2 z_3$ و $w_1 w_2 w_3$ متشابه اند اگر و تنها اگر یکی از دو رابطه
$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\bar{w}_3 - \bar{w}_1} \quad \text{و} \quad \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$$
برقرار باشد. این دو حالت چه تفاوتی با هم دارند؟
۲. فرض کنید a, b دو عدد مختلط باشند. رئوس مربع ها و مثلث های متساوی الاضلاعی که روی پاره خط واصل آن ها ساخته می شود را بر حسب a, b بیان کنید.
۳. روی دو ضلع AB و AC از مثلث ABC به ترتیب مربع های ABB_1B_2 و ACC_1C_2 را بسازید (هر دو به سمت داخل و یا هر دو به سمت خارج). ثابت کنید BC_1 و CB_2 مساوی و متعامد هستند.
۴. روی اضلاع مثلث ABC مثلث های متساوی الاضلاع BCA', CAB', ABC' را بسازید (هر سه به سمت داخل و یا هر سه به سمت خارج). الف) ثابت کنید پاره خط های AA', BB', CC' مساوی اند و با هم دو به دو زاویه 60° درجه می سازند (در واقع هم رس نیز هستند). ب) ثابت کنید مرکز های این سه مثلث تشکیل یک مثلث متساوی الاضلاع می دهند.
۵. روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC ، مثلث های قائم الزاویه ABB' و ACC' (که زوایای B' و C' قائمه اند) را بسازید. اگر M وسط BC باشد، ثابت کنید $B'M$ و $C'M$ برابر و متعامد هستند.
۶. فرض کنید قطر های چهار ضلعی محدب $ABCD$ برابر و متعامد باشند. روی اضلاع این چهار ضلعی، چهار مثلث متساوی الساقین متشابه بسازید (همه به سمت داخل و یا همه به سمت خارج). ثابت کنید قطر های چهار ضلعی تشکیل شده توسط نقاط جدید نیز برابر و متعامد اند.
۷. نشان دهید معادله هر خط را می توان به شکل $az + b\bar{z} = c$ نوشت که a, b, c سه عدد مختلط اند. به علاوه، تعیین کنید سه عدد دلخواه a, b, c چه شرطی باید داشته باشند تا معادله فوق معادله یک خط باشد. در صورتی که این شرط برقرار نباشد، جواب های این معادله به چه شکلی هستند؟

۸. الف) نشان دهید $AB \parallel CD$ اگر و تنها اگر $\frac{B-A}{C-D} = \frac{\bar{B}-\bar{A}}{\bar{C}-\bar{D}}$. در صورتی که $A = D$ باشد

این حکم به چه حکمی تبدیل می شود؟

ب) برای $AB \perp CD$ و $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ نیز روابط مشابهی را به دست آورید.

۹. الف) معادله خط واصل و عمود منصف AB را به شکل مذکور در مسئله ۷ بنویسید. معادله خط

گذرنده از C و عمود بر AB را نیز به دست آورید.

ب) فرض کنید a, b دو نقطه روی دایره واحد باشند. محل برخورد مماس های رسم شده بر دایره واحد

از این دو نقطه را بر حسب a, b به دست آورید. این نقطه چه ارتباطی با وسط a, b دارد؟ (راهنمایی:

نرم و آرگومان آن ها را مقایسه کنید)

ج) مرکز دایره محیطی، محل برخورد ارتفاع ها و محل برخورد میانه های مثلث ABC را بر حسب

A, B, C بنویسید. سپس به کمک مسئله ۸ نشان دهید این سه نقطه روی یک خط قرار دارند.

۱۰. نشان دهید چهار نقطه A, B, C, D هم دایره یا هم خط هستند اگر و تنها اگر

عددی حقیقی باشد. در این صورت علامت این عدد به چه معنی است؟ $\left(\frac{a-c}{a-d}\right) / \left(\frac{b-c}{b-d}\right)$

موفق باشید.