سوال ۱

$$\frac{x+1}{x^4+x^2}=\frac{x+1}{x^2(x^2+1)}$$

$$\equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\equiv \frac{Ax+Ax^3+B+Bx^2+Cx^3+Dx^2}{x^4+x^2}$$

الف: تجزیه به کسرهای جزئی

ب: انتگرال‌گیری

ج: پیدا کردن ثابت‌ها

$$\Rightarrow B=1,\ A+C=0,\ B+D=0,\ A=1$$

$$\Rightarrow A=1,\ B=1,\ C=-1,\ D=-1$$

$$\frac{x+1}{x^4+x^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{x+1}{x^2+1}$$

دامنه تعریف همه اعداد حقیقی بجز $x=0$ است.

برای $x>0$

$$\int\frac{x+1}{x^4+x^2}dx=\ln x-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\tan^{-1}x+K$$

$$F(1)=0 \Rightarrow 0=0-1-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}+K$$

$$K=1+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$$

برای $x<0$

$$\int\frac{x+1}{x^4+x^2}dx=\ln(-x)-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\tan^{-1}x+K$$

$$F(-1)=0 \Rightarrow 0=0+1-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}+K$$

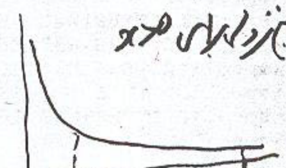
$$K=-1+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}$$

بنابراین

$$F(x)=\begin{cases}\ln(-x)-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\tan^{-1}x-1+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}, & x\\ \ln x-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\tan^{-1}x+1+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4} & x\end{cases}$$

سوال ۲

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ نزولی برای $x>0$



$$\int_1^{101}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{n}}<1+\int_1^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$\underbrace{(2\sqrt{x})\Big|_1^{101}}_{2(\sqrt{101}-1)}<\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{n}}<1+(2\sqrt{x})\Big|_1^{100}=19$$

$$2(\underbrace{\sqrt{101}}_{\geq\ \sqrt{100}=10}-1)$$

$$2\,\underbrace{[\quad]}_{18}$$

سوال ۳ (الف) $(\cosh n\pi)$ مساوی با $+1$ و -1 است

دنباله $\frac{n}{n^2+1}$ برای $n\geq 1$ نزولی است:

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1}\overset{?}{<}\frac{n}{n^2+1}$$

$$n^3+n^2+n+1\overset{?}{<}n^3+2n^2+2n$$

$1\overset{?}{<}n^2+n$ که برای $n\geq1$ درست است

و دنباله $\frac{n}{n^2+1}$ به صفر میل می‌کند، پس طبق آزمون لایب‌نیتس سری همگراست. سری همگرای مطلق نیست زیرا طبق آزمون مقایسه حدی:

$$\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n^2}{n^2+1}\longrightarrow 1\ (\text{ناصفر})$$

و سری هارمونیک $\sum\frac{1}{n}$ واگراست، پس واگراست

(ب) در اینجا جمله عمومی به صفر میل نمی‌کند پس سری اصلاً همگرا نیست. به طریق اولی همگرای مطلق نیز نمی‌شود. توجه کنید که $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ (در متن کتاب ثابت شده است)، یا با گرفتن لگاریتم

$$\ln(\sqrt[n]{n})=\frac{\ln n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

پس با به توان رساندن، $\exp$، $\sqrt[n]{n}\to1$

(پ) اثبات می‌کنیم این سری همگرای مطلق است، پس همگرا نیز می‌شود.

$$\left|\frac{\sqrt[n]{2}}{(-2)^n}\right|=\frac{1}{2^{n-\frac{1}{n}}}$$

حال داریم $n-\frac{1}{n}>\frac{n}{2}$ برای $n\geq2$، بنابراین

$$\frac{1}{2^{n-\frac{1}{n}}}<\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}=\frac{1}{(\sqrt{2})^n}$$ برای $n\geq2$

در نتیجه در مقایسه با سری هندسی $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ که قدر نسبت آن $\frac{1}{\sqrt{2}}$، کوچکتر از ۱ است همگراست، سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n-\frac{1}{n}}}$ و در نتیجه $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-\frac{1}{n}}}$ همگراست.

هر قسمت سه نمره