حل ۱

$$F_n(x)=\int_1^x (\ln t)^n dt$$

$$F_{n+1}(x)=\int_1^x (\ln t)^{n+1} dt=\int_1^x \underbrace{(\ln t)^n}_{u}\,\underbrace{(\ln t)\,dt}_{dv}$$

می‌دانیم تابع اولیه برای $\ln t$ برابر است با $t\ln t-t$ ، پس با انتگرال جزء به جزء برای $n\geq 2$:

$$F_{n+1}(x)=(\ln t)^n(t\ln t-t)\Big|_1^x-\int_1^x n(\ln t)^{n-1}\left(\frac{1}{t}\right)(t\ln t-t)\,dt$$

$$=(\ln x)^n(x\ln x-x)-0-n\int_1^x\left[(\ln t)^n-(\ln t)^{n-1}\right]dt$$

با قرار دادن $x=e$ نتیجه می‌شود $\quad F_{n+1}(e)=0-n\left(F_n(e)-F_{n-1}(e)\right)$

حل ۲

$$f(x)=xe^{-\frac{1}{x}},\quad f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}+\frac{x}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad (1)$$

$$f''(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} \quad (1)$$

$f'(x)=0\Rightarrow x=-1\ \&\ f(-1)=-e,\ f''(-1)<0$ ماکزیمم نسبی (1)

	-1	0	
f	$-\ \ -e\ \ -$		$+$
f'	$+\ \ 0\ \ -$		$+$
f''	$-\ \ \ -$		$+$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{t}}{-t}=-\infty \quad (\tfrac{1}{2})$$

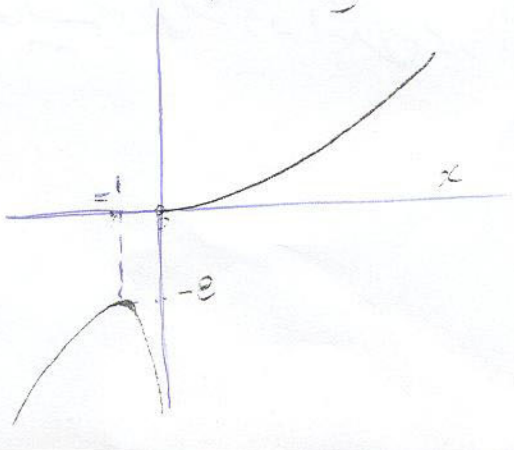
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{t}=0 \quad (\tfrac{1}{2})$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(e^{-\frac{1}{x}}+\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(e^{-t}+\frac{t}{e^{t}}\right)$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(e^{-t})+\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{e^{t}}\right)=0+0=0 \quad (1)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{t\to-\infty}\frac{1+t}{e^{t}}=-\infty \quad (1)$$

به این ترتیب شکل تقریبی منحنی به صورت زیر است



(1)

جواب ۳ (الف) با تعویض متغیر $1-\sqrt{x}=u^2$ داریم $-\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=2u\,du$ ، پس

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}dx=\int \frac{-4u\sqrt{x}}{u}du=(4)\int (u^2-1)du=4\left(\frac{u^3}{3}-u\right)$$

$$=(4)\left(\frac{1}{3}(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}-(1-\sqrt{x})\right)$$

۳ نمره

وقتی $x\to 1^-$ مقدار عبارت بالا ۰ میل می‌کند، پس

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}dx=0-4\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{8}{3}$$

۱ نمره

تعویض متغیرهای دیگر هم هست ممکن است که به کار ببرد: $\sqrt{x}=\sin\theta$ ، یا اول $\sqrt{x}=t$ و بعداً کاری شبیه تعویض متغیر بالا

(ب) برای $p>\frac{1}{2}$ و $0\le x<1$ داریم $x^p<x^{\frac{1}{2}}$ ، پس $\frac{1}{\sqrt{1-x^p}}<\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}$ ، بنابراین در تقابل، انتگرال نامره همگرای بالا $\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}dx=\frac{8}{3}\right)$ نتیجه می‌شود که برای $p>\frac{1}{2}$ انتگرال نامره داده شده همگراست. ۱ نمره بنابراین فرض می‌کنیم $0<p<\frac{1}{2}$.

قرار می‌دهیم $1-x^p=u$ ، پس $-px^{p-1}dx=du$ و $x^{p-1}=(1-u)^{1-\frac{1}{p}}$. چون فرض کرده‌ایم $0<p<\frac{1}{2}$ ، داریم $1-\frac{1}{p}<0$ ، $\frac{1}{p}-1>0$ و $0\le(1-u)^{\frac{1}{p}-1}<1$ ، بنابراین برای $0<a<1$

$$0<\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^p}}dx=\int_1^{1-a^p}\frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{p}\right)(1-u)^{\frac{1}{p}-1}du<\left(\frac{1}{p}\right)\int_{1-a^p}^{1}\frac{1}{\sqrt{u}}du$$

وقتی $a\to 1^-$ ، داریم $1-a^p\to 0^+$ ، ولی انتگرال $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}du$ طبق مثال درس (کتاب) همگراست، پس در تقابل نتیجه می‌شود که انتگرال مورد نظر همگراست

۳ نمره