سوال ۱

$$f(x) = (x^3 - x^2)^{99}$$

$$f'(x) = 99(x^3 - x^2)^{98}(3x^2 - 2x)$$

$$= 99x^{199}(x-1)^{98}(3x-2)$$

پس نقطه بحرانی عبارتند از $0, \frac{2}{3}, 1$ ۱ نمره

حال

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{d}{dx}\left[99x^{199}(x-1)^{98}\right]\cdot(3x-2)\Big|_{x=\frac{2}{3}} + 99x^{199}(x-1)^{98}\cdot(3)\Big|_{x=\frac{2}{3}}$$

$$= 99\left(\frac{2}{3}\right)^{199}\left(\frac{1}{3}\right)^{98}\cdot 3 > 0$$

که نشان می‌دهد نقطه بحرانی $\frac{2}{3}$ یک مینیمم نسبی است. ۲ نمره

برای نقطه بحرانی ۰ می‌نویسیم

$$f(x) = x^{198}(x-1)^{99}$$

$$= x^{198}\left(\sum_{j=0}^{99}\binom{99}{j}x^j(-1)^{99-j}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{99}(-1)^{j+1}\binom{99}{j}x^{198+j}$$

$$= -x^{198} + \cdots + x^{297}$$

اگر از این عبارت مشتق بگیریم و x را برابر صفر قرار دهیم، تا مشتق رتبه ۱۹۷ همه حالات صفر می‌شود، ولی

$$f^{(198)}(0) = -(198)!$$

که نشان می‌دهد نقطه بحرانی ۰ یک ماکسیمم نسبی است. ۲ نمره

به همین ترتیب برای نقطه بحرانی $x=1$:

$$f(x) = ((x-1)+1)^{198}(x-1)^{99}$$

$$= (x-1)^{99}\sum_{j=0}^{198}\binom{198}{j}(x-1)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{198}\binom{198}{j}(x-1)^{99+j}$$

$$= (x-1)^{99} + \cdots + (x-1)^{297}$$

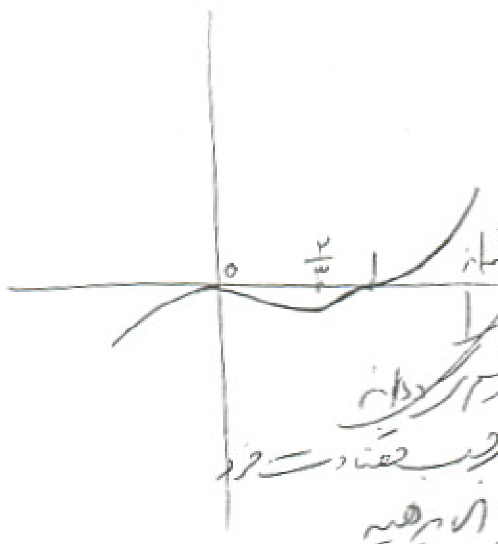
اگر از این عبارت مشتق بگیریم و x را برابر ۱ قرار دهیم

تا رتبه ۹۸ مشتق صفر می‌شود، ولی

$$f^{(99)}(1) = 99!$$

چون اولین مشتق غیر صفر از رتبه فرد است نقطه $x=1$ یک نقطه عطف است. ۲ نمره

ضمناً با توجه به محاسبات $f(x)$ نمودار زیر بدست می‌آید:



نمره ندارد ولی اگر تست دیده قبل از امتحان این شکل را درست رسم کرده‌اند مرکز نیم نمره ... درست کرده نمره اضافه بدهید

سوال ۲

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n(n+i)}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{i}{n}}}\right)$$

تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ روی بازه $[1,2]$ را در نظر می‌گیریم. اگر بازه را به n قسمت مساوی افراز کنیم، نقطه سمت راست هر زیربازه به شکل $1+\frac{i}{n}$ است برای $i=1,\dots,n$ و طول هر زیربازه $\frac{1}{n}$ است. پس عبارت بالا یک مجموع ریمان برای f روی $[1,2]$ است. وقتی $n\to\infty$ میل کند نرم افراز به صفر میل می‌کند، پس حد عبارت بالا برابر است با $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$. برای $\frac{1}{\sqrt{x}}$ یک تابع اولیه عبارت است از $2\sqrt{x}$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = (2\sqrt{x})\Big|_1^2 = 2(\sqrt{2}-1)$$

معادلاً انتگرال $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$ را در نظر بگیرید

سوال ۳) دامنه تعریف tan و |tan| همه نقاط حقیقی به غیر مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ است،
به علاوه هر تابع تناوبی با دوره π است. پس نخست تابع اولیه را در $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ بررسی می‌کنیم.

$$|\tan x| = \begin{cases} \frac{\sin x}{\cos x} & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{-\sin x}{\cos x} & -\frac{\pi}{2} < x \le 0 \end{cases}$$

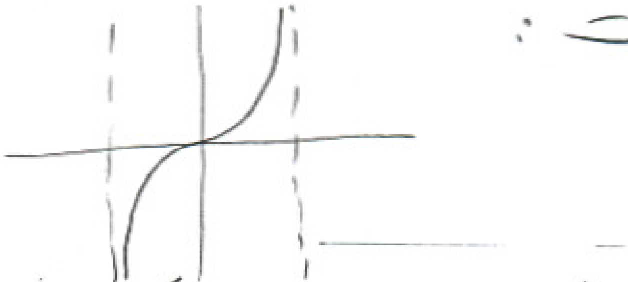
که این تابع در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ متصله
در $x=0$ پیوسته است

تابع حقیقی پیوسته یک تابع اولیه برای $t(x)$ عبارت است از

۴ نمره اول

$$T(x) = \begin{cases} -\ln(\cos x) & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ \ln(\cos x) & -\frac{\pi}{2} < x \le 0 \end{cases}$$

توجه کنید که $T(0)=0$، T برای $x>0$ مثبت است و برای $x<0$ منفی است. مشتق آن در $x=0$ صفر می‌شود
چون $|\tan 0|=0$ و $T(x)\to+\infty$ وقتی $x\to\frac{\pi}{2}^-$ و $T(x)\to-\infty$ وقتی $x\to-\frac{\pi}{2}^+$، پس نمودار
T به این شکل است:



۳ نمره

تابع اولیه‌های دیگر t روی $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ با اضافه کردن مقدار ثابت به دست می‌آیند. تابع
اولیه کلی t به این صورت است که روی هر بازه به شکل $]n\pi-\frac{\pi}{2}, n\pi+\frac{\pi}{2}[$ که n عدد
صحیح می‌باشد، ثابت دلخواه C_n را به مقدار به دست آمده از تکرار تناوبی T اضافه کرد،
یعنی شکل کلی تابع اولیه به شکل زیر است:

$$\begin{cases} -\ln|\cos x| + C_n & n\pi \le x < n\pi + \frac{\pi}{2} \\ \ln|\cos x| + C_n & n\pi - \frac{\pi}{2} < x \le n\pi \end{cases}$$

که دنباله (C_n)، $n=0,\pm1,\pm2,\dots$ دنباله‌ای دلخواه از اعداد حقیقی است. ضمناً توجه کنید که چون
$\cos x$ برای $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ منفی است، برای تکرار تناوبی لازم است از قدر مطلق
استفاده شود. البته به جای $|\cos x|$ در بالا می‌توانیم بنویسیم $(-1)^n\cos x$.

۱ نمره