سوال ۱ تقریب خطی $f(x)=\tan^{-1}x$ حول $x=1$ را می‌نویسیم و خطا را برای h مثبت تخمین می‌زنیم

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\ ,\ f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

قسمت اول: ۳ نمره

$$\tan^{-1}(1+h)=\tan^{-1}(1)+\left(\frac{1}{1+1}\right)\cdot h+\frac{1}{2!}h^2\left(\frac{-2t}{(1+t^2)^2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{2}\left(\frac{-2t}{(1+t^2)^2}\right)$$

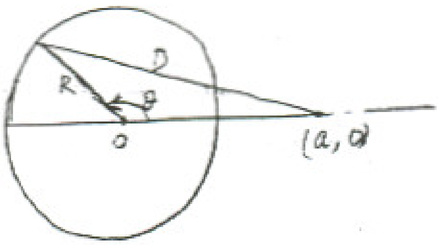
که در آن t بین ۱ و $1+h$ است. چون $h\ge 0$، داریم $t\ge 1$، پس $\frac{1}{1+t^2}\le\frac{1}{2}$. از طرفی دیگر همواره $\frac{2t}{1+t^2}\le 1$ (طرفین-وسطین کنید $0\le(t-1)^2$)، بنابراین

تخمین خطا: ۴ نمره

$$-\frac{1}{2}\le\frac{-2t}{(1+t^2)^2}=-\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\le 0$$

و حکم نتیجه می‌شود.

سوال ۲



$$D^2=a^2+R^2-2aR\cos\theta$$

نسبت به t مشتق می‌گیریم:

$$2D\frac{dD}{dt}=+2aR\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

داریم $\omega=\frac{d\theta}{dt}$، پس $D\frac{dD}{dt}=aR\omega\sin\theta$ (*). وقتی نقطه متحرک در $(0,R)$ باشد، $\theta=\frac{\pi}{2}$ و $D=\sqrt{a^2+R^2}$، پس از (*) داریم

تا اینجا ۳ نمره

$$\frac{dD}{dt}=\frac{aR\omega}{\sqrt{a^2+R^2}}$$

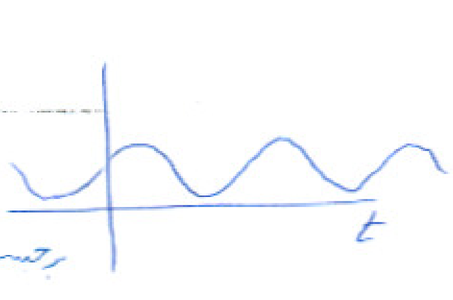
برای رسم نمودار، نخست توجه می‌کنیم که $D(\theta)$ تناوبی با دوره 2π است، پس کافی است نمودار در $[-\pi,\pi]$ رسم شود. از (*) مشتق می‌گیریم:

$$\left(\frac{dD}{dt}\right)^2+D\frac{d^2D}{dt^2}=aR\omega^2\cos\theta$$

چون نقطه $(a,0)$ روی نیمه مثبت محور x است، کمترین D به ازای مضارب 2π و بیشترین آن به ازای مضارب فرد π حاصل می‌شود. در نقاط عطف $\frac{d^2D}{dt^2}=0$ و چون $\left(\frac{dD}{dt}\right)^2\ge 0$، داریم $\cos\theta\ge 0$، پس نقاط عطف در $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ قرار دارند. ضمناً چون $a>R$، D همواره مثبت است. بنابراین شکل تقریبی نمودار:

۳ نمره

برحسب θ



برحسب t

سوال ۳ داریم $f'(x)=5x^4-3x^2-1$ چون قضیه مقدار میانگین

$$f(b)-f(a)=\underset{[-1,1] \text{ روی}}{f'(t)}.(b-a)$$

که t نقطه‌ای بین a و b است. بنابراین اگر M ماکسیمم $|f'(t)|$ باشد، در این صورت می‌نویسیم:

(۲+۱ نمره)

$$|f(b)-f(a)| \le M|b-a|$$

برای پیدا کردن ماکسیمم $|f'(t)|$ روی $[-1,1]$، $t\in[-1,1]$، مقدار ماکسیمم و مینیمم $f'(t)$ روی $[-1,1]$ را پیدا می‌کنیم. چون f' خود مشتق‌پذیر است، کافی است نقاط بحرانی و دو نقطه انتهایی را در نظر بگیریم

$$f'(\pm1)=5-3-1=1 \,,\, |f'(\pm1)|=1$$

مشتق f' هست:

$$f''(x)=20x^3-6x$$

این را برابر صفر قرار می‌دهیم تا نقاط بحرانی بدست آیند:

$$20x^3-6x=0 \Rightarrow x=0,\pm\sqrt{\frac{3}{10}}$$

$$f'(0)=-1 \,,\, |f'(0)|=1$$

$$f'\left(\pm\sqrt{\frac{3}{10}}\right)=\frac{45}{100}-\frac{9}{10}-1=-1/45$$

$$\left|f'\left(\pm\sqrt{\frac{3}{10}}\right)\right|=1/45$$

پس $M=1/45$ حکم ثابت می‌گردد

۱ نمره برای راه درست
۱ نمره برای دو نقطه انتهایی
۱ نمره برای نقاط بحرانی
۱ نمره نتیجه‌گیری