سوال ۱) تعریف می‌کنیم $A_1 = 0/1 = \frac{1}{2}$ ، $A_2 = 0/10 = \frac{1}{2}$ ، $A_3 = 0/100 = \frac{1}{2}$ ، $A_4 = 0/1001 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}$ ، و برای $n \geq 4$

$$A_n = 0/1001\cdots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{امین } n}}{1}00\cdots = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

حال $0/10100\cdots = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}$.

راه اول: تعریف $A = 0/1001111\cdots$

$$A = \sup A_n$$

توجه می‌کنیم که مجموعه $\{A_n \mid n=1,2,\dots\}$ دارای کران بالایی است، مثلاً $B=1$، پس طبق اصل تمامیت، باید دارای کوچکترین کران بالایی باشد. کوچکترین کران بالایی را به $0/1001111\cdots$ نمایش می‌دهیم. حال نشان می‌دهیم که کوچکترین کران بالایی مجموعه $\{A_n \mid n=1,2,\dots\}$ برابر $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}$ است. اولاً برای $n<4$ ، داریم $A_n = \frac{1}{2} < \frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}$ ، ثانیاً برای $n \geq 4$:

$$A_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}\left(1+\cdots+\frac{1}{2^{n-4}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n-3}}}{1-\frac{1}{2}}\right) < \frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}\left(1-\frac{1}{2^{n-3}}\right) < \frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}$$

پس $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}$ کران بالایی برای مجموعه است. حال نشان می‌دهیم $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}$ کوچکترین کران بالایی برای این مجموعه است. برای $n \geq 4$ داریم

$$(*) \qquad \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}\right) - A_n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}\right) - \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}\left(1-\frac{1}{2^{n-3}}\right)\right] = \frac{1}{2^n}$$

اگر یک کران بالایی مانند M برای A_n ها کوچکتر از $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}$ وجود داشته باشد، آنگاه باید داشته باشیم $A_n \leq M < \frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}$ $(n \geq 4)$ ، پس بنابر $(*)$:

$$\left|M - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}\right)\right| < \frac{1}{2^n} \quad \text{برای هر } n \geq 4$$

از خاصیت ارشمیدسی نتیجه می‌شود که $M = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}$.

راه دوم: تعریف $A = 0/1001111\cdots$

نشان می‌دهیم دنباله (A_n) همگراست و حد آن را $0/1001111\cdots$ نمایش می‌دهیم. مانند بالا ثابت می‌کنیم این حد برابر $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}$ است.

۴ نمره

سوال ۲ (الف) توجه کنید که $z^4-2iz^2-1=(z^2-i)^2$

یا با حل معادله درجه دوم نسبت به z^2 داریم

$$z^2=i\pm\sqrt{i^2+1}=i$$

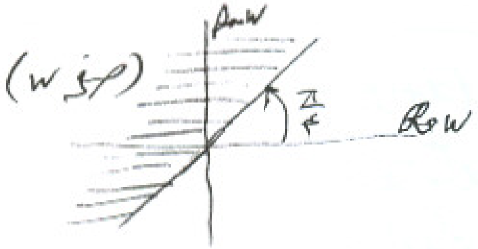
پس در هر صورت $z^2=i$ ، بنابراین جواب مسئله جذرهای i است. با توجه به اینکه $\arg i=\frac{\pi}{2}$ و $|i|=1$ ، جذرهای i عبارتند از:

$$\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}} \quad , \quad \cos\left(\frac{2\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}$$

همچنین با حل $(x+iy)^2=i$ یا $\begin{cases}x^2-y^2=0\\ 2xy=1\end{cases}$ می‌توان به همین نتیجه رسید.

سوال ۲ (ب) نخست قرار می‌دهیم $w=z^3$. نامساوی $\mathrm{Re}\,w<\mathrm{Im}\,w$ نیم صفحه‌ی هاشور زده‌ی زیر را مشخص می‌کند:

۴ نمره



به بیان دیگر $\frac{\pi}{4}<\arg w<\frac{5\pi}{4}$. حال $w=z^3$ که شرط لازم و کافی برای آن می‌شود:

$$\frac{\pi}{12}<\arg z<\frac{5\pi}{12}$$

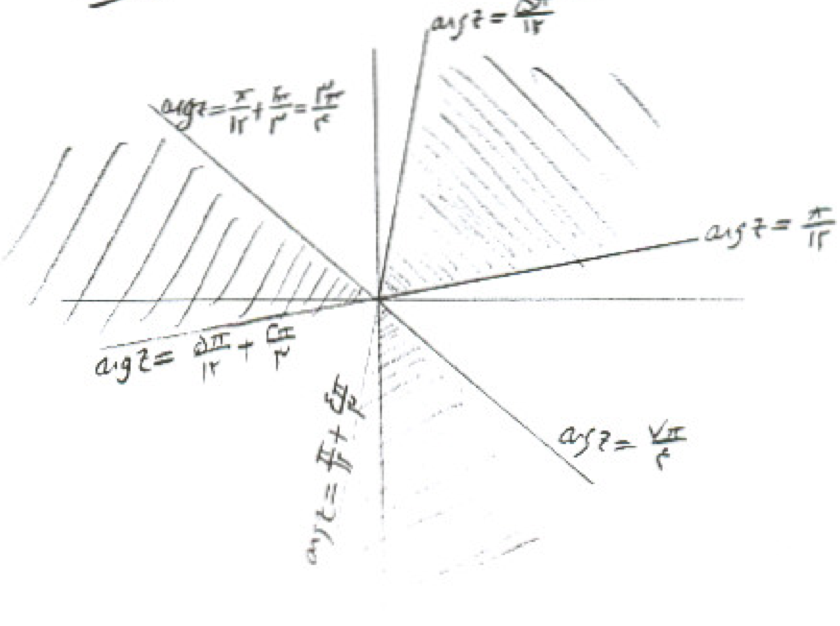
یا

$$\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}<\arg z<\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}$$

یا

$$\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}<\arg z<\frac{5\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}=\frac{7\pi}{4}$$

بنابراین ناحیه‌ی مورد نظر در صفحه z اجتماع سه ناحیه هاشور زده در شکل زیر است



سوال ۳

$A = 2615/a_1a_2a_3\cdots$ ، $A_n = 2615/a_1\cdots a_n$

می‌خواهیم n را طوری بیابیم که $|A^2-A_n^2|<10^{-2}$. داریم:

$$|A^2-A_n^2| = |A+A_n||A-A_n| \le (2700+2700)\cdot(0/0\cdots 0a_{n+1}a_{n+2}\cdots)$$

$$\le 10^4\cdot 10^{-n} = 10^{4-n}$$

حال اگر $10^{4-n} < 10^{-2}$ شرط مورد نظر تامین می‌شود و این نامساوی معادل است با $10^6<10^n$ ، بنابراین $n\ge 7$ کار می‌کند.

راه هندسی برای سوال ۲ (ب)

$$z^3=(x+iy)^3=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$$

$$\mathrm{Re}\,z^3<\mathrm{Im}\,z^3 \iff x^3-3xy^2<3x^2y-y^3$$

$$\iff x^3+y^3-3xy(x+y)<0 \iff (x+y)^3-6xy(x+y)<0$$

$$\iff (x+y)(x^2+y^2-4xy)<0 \iff (x+y)(y-(2+\sqrt{3})x)(y-(2-\sqrt{3})x)<0$$

روی سه خط راست $x+y=0$ ، $y=(2+\sqrt{3})x$ و $y=(2-\sqrt{3})x$ طرف چپ صفر می‌شود، در گذر از این خطوط تغییر علامت رخ می‌دهد، وقتی دو فاکتور هم‌علامت و سومی منفی باشد نامساوی برقرار است که به شکل مقابل می‌رسیم. (توجه کنید که $\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$ ، $\tan\frac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}$)