جواب ۱ برای $x\neq 0$، مقدار $f(x)$ آمیزهٔ جبری تابع‌های پیوسته است با مخرج ناصفر، پس در $x\neq 0$ پیوسته است. اگر تابع در نقطهٔ صفری $x=0$ حد داشته باشد و مقدار $f(0)$ را برابر آن حد تعریف کنیم، تابع حاصل در $x=0$ نیز پیوسته خواهد بود. حال بسط $\sinh$ و $\sin$ هر دو در ۰ معتبر هستند و

$$\sinh x - \sin x = \left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\cdots$$

بنابراین برای $x\neq 0$

$$\frac{\sinh x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{3}+x(\underbrace{\cdots}_{\text{سری همگرا}})$$

نتیجه اینکه $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{3}$ و با تعریف $f(0)=\frac{1}{3}$ یک تابع پیوسته حاصل می‌گردد.

اگر به جای استفاده از سری، از هوپیتال هم استفاده کنند نمره می‌گیرند

---

جواب ۲

الف)

$$\left(\log_a^x\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{e^{\frac{\ln(\ln x)}{x}}}{e^{\frac{\ln(\ln a)}{x}}}$$

حال برای $a$ ثابت $\frac{\ln(\ln a)}{x}\to 0$ وقتی $x\to+\infty$، پس حد مخرج برابر ۱ است

از طرفی دیگر می‌دانیم $\frac{\ln x}{x}\to 0$ وقتی $x\to+\infty$، پس $\frac{\ln(\ln x)}{x}=\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\frac{\ln x}{x}$ نیز به صفر میل می‌کند وقتی $x\to+\infty$. بنابراین حد صورت نیز برابر ۱ است داریم

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\log_a^x\right)^{\frac{1}{x}}=1.$$

ب)

$$\left(\frac{a+n}{b+n}\right)^n=\left(\frac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{b}{n}}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$$

طبق مطلب کتاب درسی

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t=e^x$$

راه ۲:

$$\left(\frac{a+n}{b+n}\right)^n=\left(1+\frac{a-b}{b+n}\right)^n=\left(1+\frac{a-b}{b+n}\right)^{-b}\left(1+\frac{a-b}{b+n}\right)^{b+n}\to 1\cdot e^{a-b}$$

$$V(a)=\pi\int_a^{a^2} f(x)^2\,dx \ge 0$$

توجه کنید که $V(a)\to 0$ وقتی $a\to+\infty$ زیرا درجه مخرج $\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$ از ۱ بزرگتر است، انتگرال ناسره $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx$ همگراست. پس $\int_a^{+\infty}$ و به طور اولی $\int_a^{a^2}$ را می‌توان با بزرگ کردن $a$، دلخواه کوچک کرد. از طرف دیگر $V(1)=0$، بنابراین ماکسیمم باید در یک نقطه درونی $(a,\infty)$ بدست آید. چون طبق قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال $V(a)$ هموار است بر حسب $a$ مشتق‌پذیر است $(a>0)$ پس در نقطه ماکسیمم مشتق باید صفر شود.

$$0=V'(a)=\pi\left\{(2a)(f(a^2))^2-f(a)^2\right\}\Rightarrow (2a)(f(a^2))^2=f(a)^2$$

$$\sqrt{2a}\,f(a^2)=\pm f(a)\Rightarrow \sqrt{2a}\,\frac{1}{a(a^2+1)}=\pm\frac{1}{\sqrt{a}(a+1)}$$

$$a(a^2+1)=\pm\sqrt{2}a(a+1)\Rightarrow a^2+1=\pm\sqrt{2}(a+1)\quad (\text{چون } a\ge 1>0)$$

$$\begin{cases} a^2-\sqrt{2}a+1-\sqrt{2}=0 \\ a^2+\sqrt{2}a+1+\sqrt{2}=0 \end{cases}$$
ریشه حقیقی ندارد

$$a=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4+4\sqrt{2}}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2+4\sqrt{2}}}{2}$$

تنها ریشه مثبت: $a=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{-2+4\sqrt{2}}}{2}$

اگر محاسبات را طبق بالا انجام دهند و ثابت کنند ماکسیمم است نمره کامل می‌گیرند بدون مقدمات اولیه

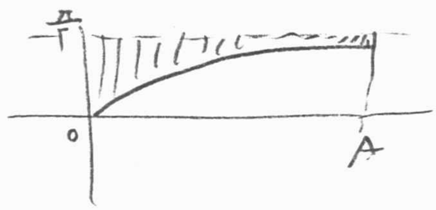
چون مسئله حتماً باید ماکسیمم داخلی داشته باشد، این نقطه مطلوب است.

---

راه دیگر: اگر با تغییر متغیر $t=\sqrt{x}$ از طریق تجزیه کسرها (کسرهای جزئی) $V$ را به دست آورند و با مشتق‌گیری به جواب برسند نیز بسته به میزان پیشروی و درستی محاسبات حداکثر ۱۵ نمره.

۱

جواب ۴




$$\text{مساحت} = \left(\frac{\pi}{2}\right)A - \int_0^A \tan^{-1}x\,dx$$

حال

$$\int_0^A \tan^{-1}x\,dx \underset{\text{انتگرال جزء به جزء}}{=\!=\!=} x\tan^{-1}x\Big|_0^A - \int_0^A \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= A\tan^{-1}A - 0 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^A$$

$$= A\tan^{-1}A - \frac{1}{2}\ln(1+A^2)$$

$$\text{مساحت} = \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}A\right)A + \frac{1}{2}\ln(1+A^2)$$ ۱۰ نمره

چون $A>0$، $\tan^{-1}A$ در $]0,\frac{\pi}{2}[$ است، $\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}A=\cot^{-1}A$، پس

$$\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}A\right)A = (\cot^{-1}A)(A)$$

فرض می‌کنیم $\cot^{-1}A=\theta$، پس

$$\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}A\right)A = \theta\cdot\cot\theta = \frac{\theta}{\sin\theta}\cos\theta$$

وقتی $A\to+\infty$، $\theta\to 0$ و حد بالا برابر ۱ می‌شود، پس

$$\text{مساحت} = \left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}A\right)A + \frac{1}{2}\ln(A^2+1) \longrightarrow +\infty$$

وقتی $A\to+\infty$.

۴ نمره

$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}}, \quad f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$

$$f'''(x)=+\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$$

سؤال ۵ (۴

چند جمله‌ای را داشت؛ چند جمله‌ای تیلور درجه ۲ تابع بالا است حول ۰.

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{x^3}{3!}\left(+\frac{3}{8}\right)(1+t)^{-5/2}$$

الف) برای $\frac{1}{100}$:

که $t$ بین ۰ و $\frac{1}{100}$ است. در واقع جمله خطا مثبت است، پس مقدار تقریب از مقدار واقعی کوچکتر است.

$$\text{خطا} = \frac{x^3}{3!}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)\frac{1}{\sqrt{(1+t)^5}}$$

حداکثر این عبارت برای $t=0$ بدست می‌آید

$$\text{خطا} \le \frac{1}{10^6\times 16} < 10^{-7}$$

۴ نمره

برای $-\frac{1}{100}$، جمله باقیمانده هست $\frac{(-10^{-2})^3}{3!}\left(\frac{3}{8}\right)(1+t)^{-5/2}$

که $t$ بین ۰ و $-\frac{1}{100}$ است. این عبارت منفی است، پس مقدار تقریب بزرگتر از مقدار واقعی است

$$|\text{خطا}| = \frac{1}{10^6\times 16}\,\frac{1}{(1+t)^{5/2}}$$

حداکثر مخرج وقتی است که $t=-\frac{1}{100}$، پس

$$|\text{خطا}| < \frac{1}{10^6\times 16}\cdot\frac{10^5}{99^{5/2}} < \frac{1}{160\times 9^5} < 10^{-6}$$

۴ نمره

در واقع خطا هم از $10^{-7}$ کوچکتر است ولی [illegible] ماشین حساب [illegible]

ب) این حالت خاص سری دوجمله‌ای است که بازه همگرایی آن $]-1,+1[$ است و

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-(n-1))}{n!}x^n$$

۲ نمره

$$= 1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^{n-1}\cdot n!}x^n \qquad (*)$$

در نقطهٔ $x=1$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)\cdot n} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\cdot\frac{1}{n}$$

این یک سری متناوب است که نزولی نیز هست، به علاوه جمله عمومی به صفر میل می‌کند وقتی $n\to+\infty$ زیرا که قدر مطلق جمله عمومی از $\frac{1}{n}$ کوچکتر است. پس طبق آزمون لایب‌نیتس همگراست.

در نقطهٔ $x=-1$ با جایگذاری در $(*)$ نتیجه می‌شود که سری عبارت است از:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\cdot\frac{1}{n}}$$

نشان دادیم این سری نیز همگراست.

تابع $g(x)=2-\sqrt{1-x}$ را در نظر می‌گیریم. با استقرا نتیجه می‌شود که $g^{(n)}(0)>0$ برای هر $n\geq 0$ چون این در واقع یک سری دوجمله‌ای ضرب شده در $(-1)$ است که به آن مقدار ثابت $2$ اضافه شده، شعاع همگرایی $1$ دارد. چون همه $g^{(n)}$ها مثبت هستند، بنابر ورزش ۱۴ بخش ۳ فصل ۶، نتیجه می‌شود که سری تیلور $g$ در نقاط انتهایی به تابع همگراست. سری تیلور $g$ هست:

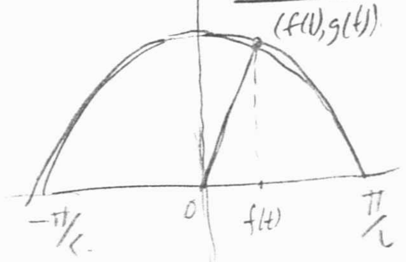
$$2-\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}(-x)^n\right\}$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^{n-1}\cdot n!}x^n$$

همگرایی این سری در نقطه انتهایی $x=1$ نتیجه مطلوب را می‌دهد.

نمره این قسمت به همه افزوده می‌شود

سوال ۶




$$t\neq 0: \quad \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \frac{f(t)}{t} = f(t)\frac{g(t)}{f(t)} = g(t) = \cos f(t)$$

اگر بدانیم f در ۰ پیوسته است، چون کسینوس نیز پیوسته است، نتیجه می‌شود که:

$$\cos(f(t)) \longrightarrow \cos(f(0)) = \cos 0 = 1$$

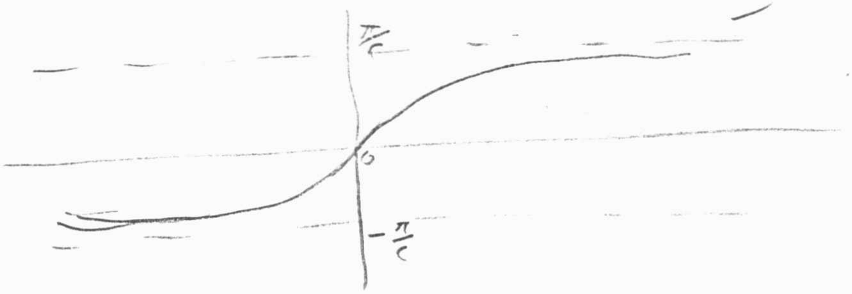
پس $f'(0)=1$.

برای پیوستگی $f(t)$ در $t=0$: $\frac{f(t)}{t} = \cos f(t)$، پس $|f(t)| = |t||\cos f(t)|$

$|f(t)| \le |t|$

بنابراین $|f(t)-f(0)| = |f(t)-0| = |f(t)| \le |t-0|$ و برای $0<\varepsilon$ داریم، اگر بگیریم $\delta=\varepsilon$ حکم به اثبات می‌رسد.

به سبب زوج بودن تابع کسینوس $\cos(-x)=\cos x$، داریم $f(-t)=-f(t)$. به علاوه وقتی $t\to+\infty$، $\frac{1}{t}\to 0^+$ و $f(t)\to\frac{\pi}{2}$. به طور مشابه وقتی $t\to-\infty$، $\frac{1}{t}\to 0^-$ و $f(t)\to-\frac{\pi}{2}$. بنابراین نمودار به شکل زیر است:




(ب) چون تابع f فرد است همه ضرایب جملات زوج سری تیلور در ۰ برابر صفر هستند و سری تیلور به صورت زیر است:

$$f(t) = c_1 t + c_3 t^3 + \cdots$$

در (الف) ثابت کردیم $c_1=1$. از $f(t)=t\cos f(t)$ داریم

$$t + c_3 t^3 + \cdots = t\cos(t + c_3 t^3 + \cdots)$$
$$= t\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \text{جملات درجه بالاتر}\right)$$

$$\Longrightarrow c_3 = -\frac{1}{2}$$