

ریاضیات عمومی ۱
امتحان میان ترم پنجم، ۱۳۸۸/۹/۲۶

وقت: یک ساعت

۱. برای هر عدد صحیح نامنفی n ، تابع F_n را برای $x > 0$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$F_n(x) = \int_1^x (\ln t)^n dt$$

برای $n \geq 2$ نشان دهید:

$$F_{n+1}(e) = n(F_{n-1}(e) - F_n(e))$$

(راهنمایی: انتگرال جزء به جزء) (۵ نمره)

۲. تابع f را به صورت $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$ برای $x \neq 0$ تعریف می‌کنیم. رفتار تابع و مشتق آن را وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ بررسی کنید و نمودار تابع را رسم کنید.

(۷ نمره)

۳. الف) با تعویض متغیر مناسب تابع اولیه‌ای برای $\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}$ روی $[0, 1]$ پیدا کنید و نشان دهید مقدار انتگرال ناسره $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} dx$ برابر $\frac{4}{3}$ است.

(۵ نمره)

ب) نشان دهید برای هر $p > 0$ ، انتگرال ناسره $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^p}} dx$ همگراست.

(۳ نمره)