

## ریاضیات عمومی ۱

امتحان میان ترم دوم، ۱۴/۸/۱۳۸۸

وقت: یک ساعت

۱. (الف) ثابت کنید

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - x \cos \frac{1}{x}) = 0$$

(۳ نمره)

(ب) نشان دهید معادله زیر به ازای هر  $a > 0$  دست کم یک جواب مثبت  $x$  دارد:

$$2x - x \cos \frac{1}{x} - a = 0$$

(۵ نمره)

۲. (الف)  $n$  و  $k$  اعداد طبیعی هستند،  $x_1$  و  $x_2$  اعداد حقیقی نامنفی. نشان دهید:

$$|x_1^{\frac{1}{n}} - x_2^{\frac{1}{n}}| < 10^{-k} \text{ آنگاه } |x_1 - x_2| < 10^{-nk}$$

راهنمایی:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

(۵ نمره)

(ب) اگر  $n$  یک عدد طبیعی باشد، آیا تابع  $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$  با دامنه  $x \geq 0$  به طور یکنواخت پیوسته است؟

(۳ نمره)

۳. دو تابع پیوسته  $f$  و  $g$  از  $[0, 1]$  به  $[0, 1]$  داده شده‌اند. نشان دهید  $x$  و  $y$  در  $[0, 1]$  وجود دارند که

$$f(x) = y \text{ و } g(y) = x \text{ چه تعبیر هندسی برای این مطلب می‌توانید ارائه کنید؟ (۴ نمره)}$$