

ریاضیات عمومی ۱
امتحان نهائی، ۱۳۸۸/۱۱/۱

وقت: سه ساعت

۱. برای $x \neq 0$ تعریف می کنیم.

$$f(x) = \frac{\sinh x - \sin x}{x^3}$$

نشان دهید می توان $f(0)$ را به گونه ای تعریف کرد که تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در همه نقاط \mathbb{R} پیوسته باشد. (۸ نمره)

۲. حدهای زیر را پیدا کنید:

(الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_a^x)^{\frac{1}{x}}$ که در اینجا $a > 1$ عددی داده شده است.

(ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a+n}{b+n}\right)^n$ که در اینجا a و b اعداد حقیقی داده شده اند.

(۱۲ نمره - هر یک ۶ نمره)

۳. تابع تعریف شده با ضابطه $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$ برای $x > 0$ را در نظر می گیریم. برای هر

$a \geq 1$ ، حجم حاصل از دوران ناحیه زیر نمودار f و بالای محور x بین خطوط راست

$x = a$ و $x = a^2$ حول محور x را به $V(a)$ نمایش می دهیم. نشان دهید $V(a)$ ماکسیمم

خود را در بازه $[1, +\infty[$ می گیرد و نقطه a را به گونه ای پیدا کنید که $V(a)$ ماکسیمم باشد.

(راهنمایی: نیازی به محاسبه انتگرال نیست).

(۱۴ نمره)

۴. مساحت بین نمودار $y = \tan^{-1} x$ ، خط $y = \frac{\pi}{4}$ و خطوط راست $x = 0$ و $x = A$ را محاسبه

کنید ($A > 0$). وقتی $A \rightarrow +\infty$ ، آیا این مساحت به مقداری متناهی میل می کند؟ جواب

خود را توجیه کنید.

(۱۴ نمره)

۵. تابع تعریف شده با ضابطه $f(x) = \sqrt{1+x}$ برای $x \geq -1$ را در نظر می‌گیریم و از چند جمله‌ای $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ به عنوان تقریب آن برای $|x|$ کوچک استفاده می‌کنیم.

(الف) نشان دهید برای $x = \frac{1}{10}$ مقدار تقریب از مقدار تابع کوچکتر است و خطای تقریب از 10^{-7} تجاوز نمی‌کند. برای $x = \frac{1}{10}$ نشان دهید مقدار تقریب از مقدار تابع بزرگتر است ولی خطای تقریب از 10^{-6} کوچکتر است.
(۸ نمره)

(ب) سری تیلور f حول 0 را بنویسید، بازه همگرایی آن را توصیف کنید، و همگرایی یا واگرایی سری در دو نقطه انتهایی بازه را بررسی کنید.
(۱۰ نمره)

۶. نمودار $\cos x$ را روی بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] -$ در نظر می‌گیریم. به ازای هر عدد حقیقی $t \neq 0$ ، نقطه اشتراک نمودار $\cos x$ با خط راست $y = \frac{1}{t}x$ را به $(f(t), g(t))$ نمایش می‌دهیم. همچنین به ازای $t = 0$ ، قرار می‌دهیم $f(0) = 0$.

(الف) نشان دهید f در $t = 0$ مشتق‌پذیر است. مشتق آن را به دست آورید، و نمودار تقریبی تابع f را رسم کنید.
(۱۰ نمره)

(ب) به فرض اینکه f در $t = 0$ تحلیلی است (یعنی برابر سری تیلور خود در یک بازه باز حول 0 است)، جملات سری تیلور تا درجه ۳ (با شمول درجه ۳) را محاسبه کنید.
(۴ نمره)

مجموع: ۸۰ نمره