

– فرض کنید $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ همگرای مطلق و $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ همگرا باشد، نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ همگرای مطلق است.

– برای هر دو دنباله a_n و b_n نشان دهید:

الف) (نامساوی شوارتز)
$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

ب) (نامساوی مینکوفسکی)
$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

راهنمایی: (الف) داریم:
$$0 \leq \sum_{k=1}^n (x a_k + b_k)^2 = x^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2x \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2$$

(ب) داریم:
$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2$$

– اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ همگرا باشند ثابت کنید:

الف) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ همگرای مطلق است. (ب) $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)^2$ نیز همگرا است.

– نشان دهید اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ همگرای مطلق است.

– فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای مثبت باشد، گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

الف) از دو سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ فقط یکی می‌تواند همگرا باشد.

ب) از دو سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^2}$ فقط یکی می‌تواند همگرا باشد.

پ) اگر $p > 2$ نشان دهید هر دو سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^p}$ می‌توانند همگرا باشند.

– فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد به طوری که به ازای هر n

$$|a_{n+1} - a_{n+2}| < \lambda |a_n - a_{n+1}|$$

که $\lambda \in (0, 1)$. ثابت کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای همگرا است.