بسمه تعالی

سری اول:

اعداد حقیقی

مسائل ریاضی عمومی I

۱ــ در صورت درستی هر یک از گزاره‌های زیر، آن را ثابت کنید و در غیر این صورت برای آن مثال نقض بزنید. (در گزاره‌های زیر منظور از ناگویا همان گنگ یا اصم است.)

الف) مجموع دو عدد گویا، گویا است.

ب) حاصل‌ضرب دو عدد گویا، گویا است.

پ) تقسیم دو عدد گویا، گویا است.

ت) مجموع دو عدد ناگویا، ناگویا است.

ث) حاصل‌ضرب دو عدد ناگویا، ناگویا است.

ج) وارون یک عدد ناگویا، ناگویا است.

چ) مجموع یک عدد گویا با یک عدد ناگویا، ناگویا است.

ح) حاصل‌ضرب یک عدد گویا با یک عدد ناگویا، ناگویا است.

خ) یک عدد ناگویا به‌توان یک عدد ناگویا برسد، ناگویا است.

د) جذر یک عدد ناگویا، ناگویا است.

۲ــ عدد طبیعی p را اول می‌نامیم درصورتی که تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن برابر ۲ باشد، مثلاً ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ عدد اول هستند ولی ۱ اول نیست، $۳ \times ۳ = ۹$ و $۵ \times ۲ = ۱۰$ عدد اول نیستند. قضیه‌ای در نظریه‌ی اعداد حکم می‌کند که هر عدد بزرگ‌تر از ۱ را می‌توان به شکلی منحصر به‌فرد به‌صورت حاصل‌ضرب اعداد اول نوشت، مثلاً $۷ \times ۳ \times ۲ \times ۲ = ۸۴$، منحصر به‌فرد بودن بدین معنی است که در تجزیه‌ی ۸۴ به اعداد اول لزوماً عدد اول ۲ دوبار، عدد اول ۳ یک‌بار، عدد اول ۷

یک‌بار ظاهر می‌شود و تجزیه‌ی دیگری به اعداد اول ممکن نیست. به کمک این قضیه نشان دهید اگر Q یک عدد طبیعی باشد که مجذور کامل (مربع کامل) نباشد، آنگاه $\sqrt{Q}$ ناگویا است.

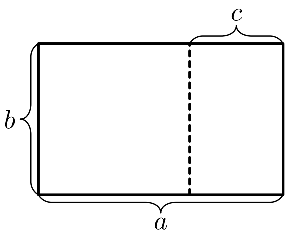
۳− نشان دهید $\sqrt{۲} + \sqrt{۳}$ گویا نیست.

۴− (تعمیم تمرین۳) اگر m و n دو عدد طبیعی باشند که دست‌کم یکی از آنها مجذور کامل نیست، نشان دهید $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ گویا نیست.

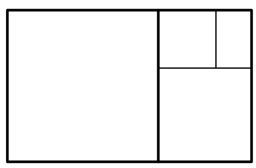
۵− نشان دهید نسبت طول قطر پنج‌ضلعی منتظم به طول ضلع آن برابر $\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$ است. این نسبت (یا گاهی معکوس آن) به **نسبت طلایی** معروف است.

۶− باستانیان مستطیلی را از نظر زیباشناختی «متناسب‌ترین» مستطیل قلمداد می‌کردند که هرگاه مربعی با ضلع برابر عرض آن از آن برداشته شود، مستطیل باقیمانده متشابه با مستطیل اولیه باشد، یعنی نسبت طول به عرض مستطیل باقیمانده برابر نسبت طول به عرض مستطیل اول باشد. نشان دهید برای چنین مستطیلی نسبت طول به عرض برابر $\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$ (نسبت طلایی) است.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$



۷− (دنباله تمرین۶) عمل برداشتن مربع به ضلع عرض را در مورد مستطیل کوچک‌تر شکل بالا نیز اجرا می‌کنیم. مستطیلی که از مستطیل کوچک‌تر باقی می‌ماند نیز همچنان دارای نسبت طلایی طول به عرض است. این عمل را می‌توان مجدداً ادامه داد و همواره یک «مستطیل طلایی» به‌دست می‌آید. از این فرآیند با اثباتی مشابه اثبات هیپاسوس (ولی ساده‌تر!) نشان دهید که نسبت طلایی ناگویا است.



۸− صورت دوم اصل تمامیت را برای $\mathbb{R}$ به این صورت ثابت کنید: هرگاه زیرمجموعه‌ی ناتهی S از $\mathbb{R}$ کران بالایی داشته باشد، آنگاه S کوچک‌ترین کران بالایی (منحصر به فرد) دارد.

۹− نشان دهید حکم زیر معادل اصل تمامیت برای $\mathbb{R}$ است: هرگاه زیرمجموعه‌ی ناتهی S از $\mathbb{R}$ کران پایین داشته باشد، آنگاه S بزرگ‌ترین کران پایین (منحصر به‌فرد،) دارد.

۱۰− برای هر یک از زیرمجموعه‌های زیر از $\mathbb{R}$، مجموعه‌های کران بالایی و کران پایینی و نیز کوچک‌ترین کران بالایی و بزرگ‌ترین کران پایینی را در صورت وجود، پیدا کنید:

الف) $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ ب) $\left\{\frac{(-1)^n}{n} \ : \ n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$

پ) $\{x \ : \ x^2 < 2, x \in \mathbb{Q}\}$ ت) $\{x \ : \ x^2 - x - 1 > 0\}$

۱۱− فرض کنید مجموعه S دارای کران بالایی است و مجموعه‌ی کران‌های بالایی S را با T نمایش دهید. نشان دهید T دارای کران پایینی است و بزرگ‌ترین کران پایینی T برابر کوچک‌ترین کران بالایی S است.

۱۲− اگر A و B دو زیرمجموعه‌ی ناتهی $\mathbb{R}$ باشند، مجموعه‌ی $A+B$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A + B = \{x + y \ : \ x \in A, y \in B\}$$

اگر A و B دارای کران بالایی باشند، نشان دهید $A+B$ نیز دارای کران بالایی است و کوچک‌ترین کران بالایی $A+B$ برابر مجموع کوچک‌ترین کران‌های بالایی A و B است.

۱۳− نشان دهید شرط لازم و کافی برای اینکه عدد مثبت a دارای بیش از یک نمایش اعشاری داشته باشد این است که در یک نمایش بسط مختومه داشته باشد، یعنی از یک مرحله به بعد همه‌ی رقم‌ها صفر باشند.

۱۴− نشان دهید شرط لازم و کافی برای اینکه عدد گویا و مثبت a دارای بسط اعشاری مختومه باشد آن است که اگر $a = \frac{m}{n}$ که m و n نسبت به هم اول باشند، $n = 2^r \times 5^s$ که r و s اعداد صحیح و نامنفی هستند.

۱۵− فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند و $a < b$. نشان دهید در بازه‌ی $]a, b[$ هم عدد گویا وجود دارد و هم عدد ناگویا.

۱۶− فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند و $a < b$. نشان دهید در بازه‌ی $]a, b[$ عدد گویایی وجود دارد که بسط اعشاری آن مختومه است.

۱۷− تعمیم زیر از صورت اصل تمامیت را به قضیه کانتور معروف است ثابت کنید:

فرض کنید

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < b_3 < b_2 < b_1$$

و برای هر $e > 0$، عدد طبیعی n وجود داشته باشد که $b_n - a_n < e$. نشان دهید اشتراک بازه‌های $[a_n, b_n]$ متشکل از یک نقطه است.

۱۸− اگر $0 < a < b$، ثابت کنید $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$.

۱۹− اگر $0 < a < b$، میانگین حسابی a و b را $A = \frac{a+b}{2}$، میانگین هندسی a و b را $G = \sqrt{ab}$ و میانگین هارمونیک a و b را $H = \frac{2ab}{a+b}$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید $a < H < G < A < b$.

۲۰− اگر $0 < a < b < c$، ثابت کنید $a < \frac{3abc}{ab+bc+ca} < \sqrt[3]{abc} < \frac{a+b+c}{3} < c$.