بسمه تعالی

سری پنجم (Middle):

مشتق و کاربرد مشتق

مسائل ریاضی عمومی I

۱− چندجمله‌ای $p(x) = a_۰ + a_۱x + \cdots + a_nx^n$ با ضرایب حقیقی را درنظر بگیرید.

الف) ثابت کنید اگر به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x،

$$a_۰ + ۲a_۱x + \cdots + (n+۱)a_nx^n > ۰$$

آنگاه معادله‌ی $p(x) = ۰$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

ب) به‌طور کلی، فرض کنید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و به‌ازای عدد حقیقی مانند a و هر عدد حقیقی مانند x،

$$f(x) + (x-a)f'(x) > ۰$$

ثابت کنید معادله‌ی $f(x) = ۰$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۲− فرض کنید تابع f روی بازه‌ی $(۰, +\infty)$ تعریف شده است، مشتق‌پذیر است و $f'(x) = \frac{۱}{x}$. به‌این ترتیب f صعودی اکید است. وارون f را با g نمایش می‌دهیم. ثابت کنید به‌ازای هر x در دامنه‌ی g،

$$g'(x) = g(x) > ۰$$

۳− اعداد حقیقی $a_۱$، …، a_n داده شده‌اند. ثابت کنید $\sum_{i=۱}^{n}(x-a_i)^۲$ وقتی کمترین مقدار ممکن است که x برابر با میانگین a_i ها باشد، یعنی $x = \frac{a_۱ + \cdots + a_n}{n}$.

۴− منحنی $Ax^۲ + Bxy + Cy^۲ = ۱$ را در صفحه در نظر بگیرید که در آن $A > ۰$ و $B^۲ - ۴AC < ۰$.

الف) ثابت کنید هر خط گذرا از مبدا این منحنی را در نقطه‌ی متقارن نسبت به مبدا قطع می‌کند.

ب) ثابت کنید دورترین و نزدیکترین نقاط این منحنی به مبدا طوری قرار دارند که خطوط واصل آنها به مبدا بر هم عمودند.

۵– فرض کنید n و m اعدادی طبیعی باشند و

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x^m} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

تابع فوق در صفر چند مرتبه مشتق‌پذیر است؟ (برحسب n و m)

۶– اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر بوده و به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$xf'(x) - f(x) > 0$$

و بعلاوه وجود داشته باشد $a > 0$ به‌طوری‌که $f(a) > 0$ ثابت کنید

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

۷– فرض کنید $f(x)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی بوده و به‌ازای هر چندجمله‌ای $g(x)$ داشته باشیم $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$. ثابت کنید $f(x) = x$.

۸– فرض کنید برای هر $x > 0$ داشته باشیم $f'(x) = \frac{1}{x}$ و $f(1) = 0$. ثابت کنید به‌ازای هر $x, y > 0$ داریم

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

۹– فرض کنید $f(x)$ روی $\mathbb{R}^+$ مشتق‌پذیر بوده و برای هر $x \geq 0$ داشته باشیم، $a \leq f'(x) \leq bx$. اگر $f(0) = 0$ نشان دهید به‌ازای هر $x \geq 0$ داریم $ax \leq f(x) \leq bx$.

۱۰– ثابت کنید اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}$.

۱۱– ثابت کنید اگر $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ آنگاه $\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$.

۱۲– آیا وجود دارد تابع مشتق‌پذیر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x)f'(x) \geq \sin x$ و $|f(x)| < 2$؟

۱۳– اگر $0 \leq x, y \leq \pi$ آنگاه داریم،

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\sin x + \sin y}{2}$$