**بسمه تعالی**

**سری چهارم (Middle):**

# تابع، حد و پیوستگی

## مسائل ریاضی عمومی I

۱− فرض کنید $f:[\circ,\text{۱}]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که $f(\circ)=f(\text{۱})$.

الف ) ثابت کنید عددی مانند $x$ وجود دارد که $\circ < x \leq \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ که $f(x)=f\big(x+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\big)$.

ب ) ثابت کنید برای هر عدد طبیعی مانند $n$، نقطه‌ای مانند $x$ وجود دارد که $\circ < x \leq \frac{n-\text{۱}}{n}$ که $f(x)=f\big(x+\frac{\text{۱}}{n}\big)$.

۲− فرض کنید تابع $f$ روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و $x_\text{۱},\dots,x_n\in[a,b]$. ثابت کنید

الف ) نقطه‌ای در بازه‌ی $[a,b]$ مانند $A$ وجود دارد که

$$f(A)=\frac{\text{۱}}{n}\big(f(x_\text{۱})+\cdots+f(x_n)\big).$$

ب ) اگر $f$ نامنفی باشد، نقطه‌ای در بازه‌ی $[a,b]$ مانند $G$ وجود دارد که

$$f(G)=\sqrt[n]{f(x_\text{۱})\cdots f(x_n)}.$$

پ ) اگر $f$ نامنفی باشد، نقطه‌ای در بازه‌ی $[a,b]$ مانند $H$ وجود دارد که

$$f(H)=\frac{n}{\frac{\text{۱}}{f(x_\text{۱})}+\cdots+\frac{\text{۱}}{f(x_n)}}.$$

۳− قرار دهید $f(x)=x+\lfloor x\rfloor$ نشان دهید تابع $f$ اکیداً صعودی است، از آن نتیجه بگیرید $f$ وارون‌پذیر است، $f^{-\text{۱}}$ را محاسبه کرده و دامنه و برد آن را به‌دست آورید.

۴− فرض کنید $x$ عددی مثبت و ناگویا باشد. فرض کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند $n$، $x_n = nx - \lfloor nx \rfloor$.

الف ) ثابت کنید $0 \leq x_n < 1$ و اگر $m \neq n$، $x_m \neq x_n$.

ب ) ثابت کنید به‌ازای هر عدد مثبت مانند $\delta$، اعدادی طبیعی مانند $m$ و $n$ وجود دارند که $0 < |x_m - x_n| < \delta$.

پ ) ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند $\delta$، عددی طبیعی مانند $p$ وجود دارد که $0 < x_p < \delta$.

ت ) ثابت کنید به‌ازای هر عدد در بازه‌ی $[0, 1]$ مانند $c$ و هر عدد مثبت مانند $\delta$، عددی طبیعی مانند $q$ وجود دارد که $x_q \in (c - \delta, c + \delta)$.

۵− اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد نشان دهید $f \circ f$ نمی‌تواند یک تابع اکیداً نزولی باشد.

۶− فرض کنید $f : [0, 1] \to [0, 1]$ تابعی پیوسته باشد. ثابت کنید وجود دارد $c \in [0, 1]$ به‌طوری که $f(c) = c$.

۷− فرض کنید $f : [0, 1] \to [0, 1]$ تابعی صعودی باشد. ثابت کنید وجود دارد $c \in [0, 1]$ به‌طوری که $f(c) = c$.

۸− اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ نزولی باشد نشان دهید نقطه‌ای مانند $x_0$ وجود دارد که $f(x_0) = x_0$.

۹− فرض کنید $f$ و $g$ دو تابع پیوسته از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشند. اگر برای هر $x \in \mathbb{Q}$ داشته باشیم $f(x) = g(x)$، ثابت کنید برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $f(x) = g(x)$.

۱۰− تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \sin x = 0 \\ 1 & \sin x > 0 \\ -1 & \sin x < 0 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. نیم‌پیوستگی از بالا و نیم‌پیوستگی از پایین تابع $f$ را در نقاط $k\pi$، $x \in \mathbb{Z}$، بررسی کنید.

۱۱− تابع $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده است.

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & 2k \leq x < 2k + 1 \\ 0 & 2k + 1 \leq x < 2k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

نیم‌پیوستگی از بالا و نیم‌پیوستگی از پایین تابع $\alpha$ را در نقطه‌ی $k$، $x \in \mathbb{Z}$، بررسی کنید.

۱۲− $c$ عددی حقیقی و غیر صفر است. تابع $F_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$F_c(x) = \begin{cases} x^۲ & x < ۰ \\ x^۲ + c & x \geq ۰ \end{cases}$$

نیم‌پیوستگی تابع $F_c$ در نقطه‌ی ۰ را بررسی کنید. وجود ماکسیمم یا مینیمم تابع $F_c$ روی بازه‌ی $[-۱, ۱]$ را نیز بررسی کنید.

۱۳— اگر تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $[a, b]$ یکنوا باشد و تمام مقادیر بین $f(a)$ و $f(b)$ در برد تابع قرار گیرد ثابت کنید $f$ پیوسته است.

۱۴— حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lfloor x\rfloor + \cdots + \lfloor nx\rfloor}{n^۲}$

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lfloor x\rfloor + \cdots + \lfloor x^n\rfloor}{x^n}$، $(x > ۱)$

۱۵— فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و برای هر $x, y \in \mathbb{R}$، داشته باشیم:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

اگر $f$ در نقطه‌ی صفر پیوسته باشد نشان دهید $f$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۶— ثابت کنید اگر تابع $f(x)$ در ناحیه‌ی $[a, +\infty)$ پیوسته باشد و

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l < \infty$$

در آن صورت $f(x)$ در فاصله‌ی فوق کران‌دار است.

۱۷— $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و $x_۱, x_۲, \ldots, x_n \in [a, b]$ هستند. نشان دهید نقطه $c \in [a, b]$ وجود دارد که

$$\frac{۱}{۲}n(n + ۱)f(c) = f(x_۱) + ۲f(x_۲) + \cdots + nf(x_n).$$

۱۸— تابع پیوسته $f$ با دامنه‌ی $[۰, ۱]$ مفروض است. فرض کنید برای هر $x \in [۰, ۱]$ داشته باشیم $f(x) = f(x^۲)$. نشان دهد که $f$ تابعی ثابت است.

۱۹— اعداد حقیقی

$$a_۱ < b_۱ < a_۲ < b_۲ < \cdots < a_n < b_n$$

مفروض‌اند. ثابت کنید که چندجمله‌ای

$$P(x) = (x + a_۱)(x + a_۲)\cdots(x + a_n) + (x + b_۱)(x + b_۲)\cdots(x + b_n)$$

دارای $n$ ریشه‌ی حقیقی است.