بسمه تعالی

سری دوم (Middle):

دنباله و سری

مسائل ریاضی عمومی I

۱− همگرایی و واگرایی دنباله‌های زیر را تحقیق کنید.

الف) $\left\{\frac{(n!)^{۲}}{(۲n)!}\right\}$ ب) $\left\{\frac{e^n}{\pi^n}\right\}$

پ) $\left\{\frac{e^n}{\pi^{\frac{n}{۲}}}\right\}$ ت) $\left\{\frac{e^{\pi n}}{\pi^{en}}\right\}$

ث) $\left\{n\left(\sqrt[n]{n^n+۱}-\sqrt[n]{n^n-۱}\right)\right\}$ ج) $\left\{n\left(\sqrt{n^{۲}+۱}-\sqrt{n^{۲}-۱}\right)\right\}$

چ) $\left\{\frac{۱\times۳\times\cdots\times(۲n-۱)}{۲\times۴\times\cdots\times(۲n)}\right\}$ ح) $\{\sqrt[n]{n}\}$

۲− حد دنباله‌های زیر را در صورت وجود مشخص نمایید.

الف) $a_n=\sqrt[n]{n!}$ ب) $a_n=\frac{۱}{\binom{mn}{n}}$ که در آن $m\in\mathbb{N}$

۳− با ارائه مثالی نشان دهید اگر دنباله a_n کران‌دار باشد و $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+۱}-a_n=۰$، لزومی ندارد که دنباله a_n همگرا باشد.

۴− دنباله $\{a_n\}$ به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_۱=۱, \quad a_۲=۲, \\ a_{n+۱}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-۱}} \qquad (n\geq ۲). \end{cases}$$

الف) نشان دهید که این دنباله صعودی و کران‌دار است.

ب) حد دنباله را به‌دست آورید.

۵− دنباله $\{a_n\}$ به صورت $a_۱ = x$ و $a_{n+۱} = (a_n)^{\ln a_n}$ تعریف می‌شود، مشخص کنید به‌ازای چه مقادیری از x دنباله $\{a_n\}$ همگرا بوده و مقدار آن را برحسب x مشخص نمایید.

٦− اگر $a_۱ = x$ و $a_{n+۱} = \sqrt{۳a_n^۲ - ۸}$، مشخص کنید به‌ازای چه مقادیری از x، $\{a_n\}$ همگرا است و مقدار حد آن را برحسب x مشخص نمایید.

۷− فرض کنید $a > ۰$ و تعریف کنید $x_۰ = ۰$ و $x_{n+۱} = a + x_n^۲$ برای هر $n \geq ۰$. شرط لازم و کافی برای a پیدا کنید به‌طوری‌که دنباله x_n همگرا باشد.

۸− قرار دهید $a_۱ = ۱$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+۱} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\sqrt{۱ - \sqrt{۱ - a_n^۲}}$$

نشان دهید $\lim_{n\to\infty} a_n$ موجود است و مقدار آن را بیابید. ثابت کنید وجود دارد عدد یکتای A به‌طوری‌که $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A^n} \neq ۰$. همچنین مقدار L را نیز محاسبه کنید.

۹− فرض کنید a_n دنباله‌ای کران‌دار بوده به‌طوری‌که به‌ازای هر n، $a_{n+۱} \geq a_n - \frac{۱}{۲^n}$. نشان دهید دنباله a_n همگرا است.

۱۰− فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، ... ، x_n دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی باشند به‌طوری‌که $x_{n+۱} \leq x_n + \frac{۱}{n^۲}$ (برای $n \geq ۱$). ثابت کنید $\lim_{n\to\infty} x_n$ وجود دارد.

۱۱− فرض کنید به‌ازای هر n، $a_n > ۰$ در این صورت ثابت کنید اگر $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum \sqrt{a_n a_{n+۱}}$ نیز همگراست.

مثالی بزنید که عکس حکم فوق نادرست باشد.

نشان دهید اگر دنباله $\{a_n\}$ یکنوا باشد عکس حکم فوق درست است.

راهنمایی: $\left(\sqrt{a_{n+۱}} - \sqrt{a_n}\right)^۲ = a_{n+۱} + a_n - ۲\sqrt{a_n a_{n+۱}}$ و از آن $\sqrt{a_n a_{n+۱}} \leq \frac{۱}{۲}(a_n + a_{n+۱})$.

۱۲− اگر $\sum_{n=۱}^{+\infty} a_n$ همگرا باشد نشان دهید برای هر $\varepsilon > ۰$، وجود دارد $N \in \mathbb{N}$ به‌طوری‌که اگر $m \geq n \geq N$، آنگاه $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$.

این قضیه دو شرطی می‌باشد و به آزمون کوشی معروف است، در اینجا به دلیل دشوار بودن روش اثبات از بیان طرف دیگر آن صرف نظر می‌شود.

۱۳− فرض کنید $\sum_{n=۱}^{+\infty} a_n$ و $\sum_{n=۱}^{+\infty} b_n$ سری‌هایی با جملات مثبت بوده و وجود دارد $n_۰$ به‌طوری‌که برای هر $n \geq n_۰$، $\frac{a_{n+۱}}{a_n} \leq \frac{b_{n+۱}}{b_n}$. ثابت کنید اگر $\sum_{n=۱}^{+\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=۱}^{+\infty} a_n$ نیز همگرا است.

۱۴ــ اگر دنباله $\{a_n\}$ نزولی بوده و برای هر n، $a_n \geq ۰$ و $\sum_{n=۱}^{+\infty} a_n$ همگرا باشد ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty} na_n = ۰$$

مثالی بیاورید که نشان دهد شرط نزولی بودن a_n لازم است.

۱۵ــ به ازای چه مقادیر مثبت x، سری $\sum_{n=۱}^{+\infty}(۱ - \sqrt[n]{x})$ همگراست؟

۱۶ــ اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت بوده و به ازای هر n داشته باشیم، $a_n \leq a_{۲n} + a_{۲n+۱}$ ثابت کنید $\sum_{n=۱}^{+\infty} a_n$ واگرا است.

۱۷ــ در مورد همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر تحقیق کنید:

الف) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{e^{\pi n}}{\pi^{en}}$

ب) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \left(\frac{۱}{n}\right)^{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)}$

پ) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$، که در آن $a \in \mathbb{R}$ مقداری ثابت است.

ت) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$، که در آن $k \in \mathbb{N}$ مقداری ثابت است.

ث) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \sin \frac{۱}{n^۲}$

ج) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{۱+n!}{(n+۱)!}$

چ) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{(-۱)^n}{\sqrt{n}-(-۱)^n}$

ح) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{(-۱)^n}{n-(-۱)^n}$

خ) $\sum_{n=۱}^{+\infty}(-۱)^{n+۱} \frac{\sqrt[n]{n}}{n}$

د) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{۱+(-۱)^n}{\sqrt{n}}$

ذ) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{۱+۲(-۱)^n}{n}$

ر) $\sum_{n=۱}^{+\infty}(-۱)^n\left(\sqrt{n^۲+n}-n\right)$

ز) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{۱}{n^n}$

ژ) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{(۲n)!}{۲^n(n!)^۳}$

۱۸ــ فرض کنید دنباله $n_۱ < n_۲ < n_۳ < \cdots$ اعداد صحیح و مثبتی باشند که در آنها رقم صفر ظاهر نمی‌شود، پس

$$n_۱ = ۱, \ldots, n_۹ = ۹, n_{۱۰} = ۱۱, \ldots, n_{۹۰} = ۹۹, n_{۹۱} = ۱۱۱, \ldots$$

به کمک مقایسه با سری $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{۹^{n+۱}}{۱۰^n}$ ثابت کنید که سری $\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{n_k}$ همگرا است و مقدار آن از ۹۰ کمتر است.

۱۹ــ نشان دهید سری $\sum_{n=۱}^{+\infty}(-۱)^{n+۱} \frac{\sqrt[n]{n}-۱}{n}$ همگراست.

با ذکر دلیل مشخص کنید، چند جمله از سری را باید با هم جمع کرد تا مقدار خطا کمتر از $\frac{۱}{۱۰}$ شود.

۲۰ــ نشان دهید سری $\sum_{n=۱}^{+\infty}(-۱)^{n+۱} \frac{۱ \times ۳ \times \cdots \times (۲n-۱)}{۲ \times ۴ \times \cdots \times (۲n)}$ همگراست.

مقدار تقریبی سری را به نحوی محاسبه کنید که خطا کمتر از ۰/۲۵ باشد.