بسمه تعالی

سری دوم (Middle):

اعداد مختلط

مسائل ریاضی عمومی I

۱− ثابت کنید $\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta.$

۲− فرض کنید $P(z)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد، ثابت کنید اگر α ریشه‌ی معادله‌ی $P(z) = 0$ باشد، $\overline{\alpha}$ نیز ریشه‌ی این معادله است. چه نتیجه‌ای در مورد چندجمله‌ای‌های درجه فرد می‌توان گرفت؟

۳− معادلات زیر را حل کنید.

الف) $(x+i)^n - (x-i)^n = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$

ب) $\cos x + i\sin x = \sin x + i\cos x, \qquad x \in \mathbb{R}.$

۴− بیضی $|z-A| + |z-B| = 1$ را حول نقطه‌ی $(5, 3)$ به اندازه‌ی $\frac{\pi}{6}$ دوران می‌دهیم. معادله‌ی شکل حاصل را به‌دست آورید.

۵− منحنی $y = x^2$ تحت تجانس با ضریب $\frac{1}{2}$ به مرکز $(2, 0)$ به چه شکلی مبدل می‌شود؟

۶− اگر $T_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ تجانس به مرکز z_1 و ضریب k_1 و $T_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ تجانس به مرکز z_2 و ضریب k_2 باشد، تبدیل $T_2 \circ T_1$ را توصیف کنید.

۷− تبدیل $T(z) = (2\sqrt{3} + 2i)z + i$ را به‌صورت ترکیب یک دوران و یک تجانس به مرکز مشترک بنویسید.

۸− تبدیل $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ هر نقطه را به قرینه‌اش نسبت به خط $ax+by+c=0$ می‌نگارد. دستوری برای این تبدیل برحسب اعداد مختلط به‌دست آورید. $(a,b,c\in\mathbb{R})$

۹− فرض کنید n یک عدد طبیعی است. مجموعه‌نقاط به مختصات قطبی (r,θ) در صفحه را که در رابطه $r=\sin n\theta$ صدق می‌کنند، رسم کنید.

۱۰− فرض کنید a و b اعداد مختلط ناصفری باشند و $f(z)=az+bz^{-1}$. تصویر دایرهٔ واحد را تحت f مشخص نمائید.

۱۱− فرض کنید z و ω دو عدد مختلط باشند به‌طوری که $|z|=1$ یا $|\omega|=1$.
اگر $|z\omega|\neq 1$ ثابت کنید $\left|\dfrac{z-\omega}{1-\overline{z}\omega}\right|=1$.

۱۲− نشان دهید مثلث‌های با رئوس اعداد مختلط z_1,z_2,z_3 و z_4,z_5,z_6 متشابه‌اند اگر و تنها اگر:

$$\det\begin{bmatrix}1&1&1\\ z_1&z_2&z_3\\ z_4&z_5&z_6\end{bmatrix}=0 \quad \text{یا} \quad \det\begin{bmatrix}1&1&1\\ z_1&z_2&z_3\\ \overline{z_4}&\overline{z_5}&\overline{z_6}\end{bmatrix}=0$$

۱۳− فرض کنید $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ رئوس یک مثلث هستند. نشان دهید مثلث متساوی الاضلاع است اگر و تنها اگر، $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$.

۱۴− فرض کنید z_1,z_2,z_3,z_4 چهار نقطه روی منحنی $y=x^2$ در صفحه مختلط باشند نشان دهید:
هر چهار نقطه روی یک دایره قرار دارند اگر و تنها اگر $\operatorname{Re}(z_1+z_2+z_3+z_4)=0$.

۱۵− فرض کنید z_1 و z_2 و ... و z_5 اعداد مختلطی باشند که $|z_{i+1}+z_{i+2}|=|z_{i+3}+z_{i+4}+z_{i+5}|$ به‌ازای $i=1,2,\dots,5$ و $z_{i+5}=z_i$ ثابت کنید $z_1+z_2+\cdots+z_5=0$.

۱۶− ثابت کنید چندجمله‌ای $x^n\sin(\alpha)-\lambda^{n-1}x\sin(n\alpha)+\lambda^n\sin\left((n-1)\alpha\right)$، بر چندجمله‌ای $x^2-2\lambda\cos(\alpha)x+\lambda^2$ بخش‌پذیر است.

۱۷− اگر $\omega=e^{\frac{2\pi}{n}i}$ نشان دهید: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k)=n$

۱۸− فرض کنید برای $k=1,\dots,n$ داشته باشیم $|z_k|=1$ که $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z_k=0$. اگر $z\in\mathbb{C}$ نشان دهید:

الف) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z-z_k|^2=n\left(1+|z|^2\right)$

ب) $\displaystyle\max\{n,n|z|\}\leq\sum_{k=1}^{n}|z-z_k|\leq n\left(1+|z|\right)$

پ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z-z_k|=n$ اگر و تنها اگر $z=0$. $(n\geq 3)$