بسمه تعالی

سری پنجم (Hard)

این دسته از مسائل مربوط به دانشجویان علاقه‌مند به حل مسائل ابتکاری می‌باشد و نیز خارج از محدوده‌ی درس ریاضی عمومی است و حل آنها برای عموم الزامی نمی‌باشد، لذا چنین مسائلی در کلاس‌های حل تمرین حل نمی‌شود.

مشتق و کاربرد مشتق

مسائل ریاضی عمومی I

۱− در ناحیه‌ای از صفحه xy توزیع دما، T، به‌صورت

$$T(x,y) = ۱۰۰\frac{x^۲+y^۲}{x^۲+y^۲+۱}$$

برحسب درجه سانتی‌گراد داده شده است. متحرکی روی خط راست $y = ۱$ با سرعت ثابت ۵۰ واحد در ثانیه از چپ به راست حرکت می‌کند. این متحرک مجهز به دماسنج مدوری است که محیط آن به‌طور یکنواخت از ۰ تا ۱۰۰ مدرج شده است و عقربه‌ی دماسنج در هر لحظه حرارت نقطه‌ی عبور متحرک را نشان می‌دهد. در زمانی‌که متحرک از نقطه (۴, ۱) می‌گذرد، سرعت گردش زاویه‌ای عقربه‌ی دماسنج چیست؟

۲− فرض کنید $f:(۰+\infty)\to\mathbb{R}$ دوبار مشتق‌پذیر بوده و f'' پیوسته باشد اگر $\lim\limits_{x\to ۰^+} f'(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to ۰^+} f''(x) = +\infty$، نشان دهید

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)}{f'(x)} = ۰$$

۳− ثابت کنید اگر $۰ \le p \le ۱$ آنگاه داریم،

$$(a+b)^p \le a^p + b^p$$

۴− فرض کنید $f(x) = a_۱ \sin x + a_۲ \sin ۲x + \cdots + a_n \sin nx$ و به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $|f(x)| \leq |\sin x|$. نشان دهید

$$|a_۱ + ۲a_۲ + \cdots + na_n| \leq ۱$$

۵− فرض کنید به‌ازای هر $x \in [a,b]$، f و g مشتق‌پذیر بوده و به‌ازای $x \in (a,b)$ داشته باشیم $g'(x) \neq ۰$. ثابت کنید وجود دارد $c \in (a,b)$ به‌طوری‌که

$$\frac{f(c)-f(a)}{g(b)-g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

۶− $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر بوده و بعلاوه $f'(a) = f'(b)$. ثابت کنید وجود دارد $c \in (a,b)$ به‌طوری‌که

$$f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

۷− فرض کنید $f:[۰,۱] \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر بوده و $f(۰) = ۰$ و بعلاوه به‌ازای هر $x \in (۰,۱)$ داشته باشیم $f(x) > ۰$. ثابت کنید وجود دارد $c \in (۰,۱)$ به‌طوری‌که

$$\frac{۲f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(۱-c)}{f(۱-c)}$$

آیا وجود دارد $d \in (۰,۱)$ به‌طوری‌که

$$\frac{۳f'(d)}{f(d)} = \frac{f'(۱-d)}{f(۱-d)}.$$

۸− فرض کنید $f(x)$ روی $[۰,۱]$ مشتق‌پذیر بوده و $f(۰) = ۰$ و $f(۱) = ۱$. نشان دهید برای هر عدد طبیعی n نقاط متمایز $x_۱, \ldots, x_n$ در فاصله‌ی $[۰,۱]$ وجود دارند به‌طوری که

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{f'(x_i)} = n$$

۹− فرض کنید $f(x)$ روی فاصله‌ی $(a,+\infty)$ مشتق‌پذیر بوده و داشته باشیم

$$\lim_{a\to+\infty} \big(f(x)+f'(x)\big) = L$$

و $L \in \mathbb{R}$. ثابت کنید $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = ۰$.

۱۰− فرض کنید $c \in \mathbb{R}$ و f یک تابع باشد به‌طوری‌که:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = c, \qquad \lim_{x\to+\infty} f'''(x) = ۰,$$

ثابت کنید

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = ۰, \qquad \lim_{x\to+\infty} f''(x) = ۰.$$

۱۱− فرض کنید $f(x)$ روی $[a,b]$ مشتق‌پذیر بوده و $f(a) = ۰$ و وجود داشته باشد $A \geq ۰$ به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in [a,b]$ داشته باشیم $|f'(x)| \leq A|f(x)|$. ثابت کنید به‌ازای هر $x \in [a,b]$ داریم $f(x) = ۰$.

۱۲− فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دوبار مشتق‌پذیر بوده و $f(x)+f''(x)=-xg(x)f'(x)$ و به‌ازای هر $x\in\mathbb{R}$، $g(x)\geq ۰$، ثابت کنید $|f(x)|$ کران‌دار است.

۱۳− فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ سه‌بار مشتق‌پذیر بوده و $f'''(x)$ پیوسته باشد. ثابت کنید وجود دارد $a\in\mathbb{R}$ به‌طوری که،

$$f(a)f'(a)f''(a)f'''(a)\geq ۰$$

۱۴− فرض کنید $f(x)$ تابعی دوبار مشتق‌پذیر بوده و $f(۰)=۰$ و $f(۱)=۱$ و $f'(۰)=f'(۱)=۰$. نشان دهید وجود دارد $c\in[۰,۱]$ به‌طوری که $|f''(c)|\geq ۴$.