بسمه تعالی

سری چهارم (Hard)

این دسته از مسائل مربوط به دانشجویان علاقه‌مند به حل مسائل ابتکاری می‌باشد و نیز خارج از محدوده‌ی درس ریاضی عمومی است و حل آنها برای عموم الزامی نمی‌باشد، لذا چنین مسائلی در کلاس‌های حل تمرین حل نمی‌شود.

تابع، حد و پیوستگی

مسائل ریاضی عمومی I

۱− نشان دهید تابع

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{n} & x=\dfrac{m}{n},\ n\in\mathbb{N},\ (m,n)=۱\\ ۰ & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$$

در هر نقطه‌ی گویا، ناپیوسته و در هر نقطه‌ی ناگویا، پیوسته است.

۲− ثابت کنید هیچ تابع پیوسته ای روی $\mathbb{R}$ وجود ندارد که هر مقدار در بردش را دقیقاً دوبار بگیرد.

۳− فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته بوده و به‌ازای هر $x\in\mathbb{R}$، $f(f(f(x)))=x$. ثابت کنید به‌ازای هر $x\in\mathbb{R}$، $f(x)=x$.

۴− اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و یک به یک باشد آنگاه $f^{-۱}$ روی برد $f(x)$ تابعی پیوسته است.

۵− فرض کنید تابع $f:[۰,۱]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد و در شرایط زیر صدق کند.

الف) برای هر $x\in[۰,۱]$، $f(x)\geq ۰$.

ب) $f(۱)=۱$

پ) برای هر $x,y \in [۰,۱]$ که $x+y \in [۰,۱]$ آنگاه داشته باشیم:

$$f(x)+f(y) \leq f(x+y)$$

کوچکترین c را بیابید که $f(x) \leq cx$.

۶− فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و یک به یک بوده که دارای نقطه‌ای ثابت مانند $x_۰$ است یعنی $f(x_۰)=x_۰$، اگر به‌ازای هر $x\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f\big(۲x-f(x)\big)=x$ ثابت کنید به‌ازای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم $f(x)=x$.

۷− فرض کنید f تابعی کران‌دار روی فاصله‌ی $[a,b]$ بوده و به‌ازای هر $a\leq x\leq y\leq b$ داشته باشیم $f\big(\frac{x+y}{۲}\big)\leq\frac{f(x)+f(y)}{۲}$ ثابت کنید به‌ازای هر $x\in(a,b)$، $f(x)$ در x پیوسته است.

۸− فرض کنید $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته بوده و به‌ازای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f(\sqrt{x^۲+y^۲})=f(x)f(y)$ ضابطه‌ی $f(x)$ را به‌دست آورید.

۹− تمام توابع پیوسته $f(x)$، را تعیین کنید به‌طوری‌که به‌ازای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$f(x+y)+f(x-y)=۲f(x)f(y)$$

۱۰− ثابت کنید تنها عدد صحیح a که به‌ازای آن چندجمله‌ای $x^۳-x+a$ دارای دو ریشه‌ی صحیح است $a=۰$ می‌باشد.

۱۱− فرض کنید $f:(۰,+\infty)\to\mathbb{R}$ یک تابع اکیداً صعودی باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x>۰$ داشته باشیم:

الف) به ازای هر $x>۰$، $f(x)+\frac{۱}{x}>۰$.

ب) به ازای هر $x>۰$، $f(x)f\Big(f(x)+\frac{۱}{x}\Big)=۱$.

نشان دهید $f(۱)=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$. مثالی ارائه دهید که شرایط f فوق را دارا باشد.