بسمه تعالی

سری سوم (Hard)

این دسته از مسائل مربوط به دانشجویان علاقه‌مند به حل مسائل ابتکاری می‌باشد و نیز خارج از محدوده‌ی درس ریاضی عمومی است و حل آنها برای عموم الزامی نمی‌باشد، لذا چنین مسائلی در کلاس‌های حل تمرین حل نمی‌شود.

دنباله و سری

مسائل ریاضی عمومی I

از کتاب Stewart:

صفحه ۷۸۲ : ۴۰.

۱− همگرایی و واگرایی دنباله‌های زیر را تحقیق کنید.

الف) $\left\{\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right\}$ ب) $\left\{\dfrac{n\ln n}{\ln n!}\right\}$

۲− فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد. اگر برای هر $n \geq ۱$، داشته باشیم $\dfrac{a_{n+۱}}{a_n} \leq ۱ + \dfrac{۱}{n^۲}$ و دنباله $\left\{\dfrac{a_{n+۱}}{a_n}\right\}$ به سمت ۱ میل نکند، ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ۰$.

۳− ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(۲\sqrt[n]{n} - ۱)^n}{n^۲} = ۱$$

۴− برای هر عدد حقیقی $x \geq ۱$ نشان دهید:

$$\lim_{n\to\infty} \left(۲\sqrt[n]{x} - ۱\right)^n = x^۲$$

۵− ثابت کنید اگر $\sum\limits_{n=۱}^{+\infty} a_n$ واگرا باشد آنگاه $\sum\limits_{n=۱}^{+\infty} na_n$ نیز واگراست.

۶− ثابت کنید اگر $\prod\limits_{n=۱}^{\infty}(۱ + a_n)$ همگرا باشد آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ۰$.

۷− فرض کنید به ازای هر n، $a_n > 0$، ثابت کنید $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ همگرا است اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ همگرا باشد.

۸− فرض کنید به ازای هر n، $a_n \geq 0$، ثابت کنید $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ همگرا است و $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ است اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ همگرا باشد.

۹− فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی ناصفر بوده به‌طوری که $x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1} = 1$، ثابت کنید وجود دارد عدد حقیقی a به‌طوری که به‌ازای هر $n \geq 1$،

$$x_{n+1} = ax_n - x_{n-1}.$$

۱۰− فرض کنید $\{b_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت بوده به‌طوری که $b_0 = 1$ و

$$b_n = 2 + \sqrt{b_{n-1}} - 2\sqrt{1+\sqrt{b_{n-1}}}$$

مقدار $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n 2^n$ را محاسبه کنید.

۱۱− فرض کنید $\{t_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد. نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+t_{n+1}}{nt_n}$ واگرا است.