بسمه تعالی

سری دوم (Hard)

این دسته از مسائل مربوط به دانشجویان علاقه‌مند به حل مسائل ابتکاری می‌باشد و نیز خارج از محدوده‌ی درس ریاضی عمومی است و حل آنها برای عموم الزامی نمی‌باشد، لذا چنین مسائلی در کلاس‌های حل تمرین حل نمی‌شود.

اعداد مختلط

مسائل ریاضی عمومی I

۱− فرض کنید z_1, z_2, z_3, z_4 چهار نقطه از صفحه مختلط باشند نشان دهید:

هر چهار نقطه روی یک خط یا یک دایره قرار دارند اگر و تنها اگر $\operatorname{Im}\left(\frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}\right) = 0$.

۲− نشان دهید ریشه‌های $11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0$ همگی روی دایره واحد قرار دارند.

۳− فرض کنید $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$. ثابت کنید ریشه‌های چندجمله‌ای

$$z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 = 0$$

در درون دایره‌ای به مرکز مبداء و شعاع $\sqrt{1 + |c_{n-1}|^2 + \cdots + |c_0|^2}$ قرار دارند.

۴− ثابت کنید: $\sum_{k=1}^{90} 2k \sin\left((2k)^\circ\right) = 90 \cot 1^\circ$.

۵− ثابت کنید:

الف) $$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2n} + 1\right)$$

ب) $$x^{2n+1} - 1 = (x - 1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right)$$

پ) $$x^{2n+1} + 1 = (x + 1)\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 + 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + 1\right)$$

ت) $$x^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 + 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + 1\right)$$

۶- با استفاده از تمرین قبل ثابت کنید:

الف)
$$\prod_{\substack{k=1\\ 2k\neq n}}^{n} \cos\frac{2k\pi}{2n} = \begin{cases} \dfrac{n(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} & \text{زوج } n \\[2ex] \dfrac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^{n-1}} & \text{فرد } n \end{cases}$$

ب)
$$\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{2k\pi}{2n+1} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n}} & \text{زوج } n \\[2ex] \dfrac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^{n}} & \text{فرد } n \end{cases}$$

پ)
$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n}} & \text{زوج } n \\[2ex] \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n}} & \text{فرد } n \end{cases}$$

ت)
$$\prod_{\substack{k=0\\ 2k+1\neq n}}^{n-1} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} & \text{زوج } n \\[2ex] \dfrac{n(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} & \text{فرد } n \end{cases}$$

ث)
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

۷- برای هر دو عدد حقیقی x و y و عدد طبیعی n نشان دهید:

الف)
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(y+kx) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x+y\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

ب)
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(y+kx) = \frac{\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x+y\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

۸- اگر $\omega_1,\ldots,\omega_n$ کلیه ریشه‌های n ـ ام واحد باشند، نشان دهید:

$$\sum_{j<k} |\omega_j-\omega_k|^{-2} = \frac{n(n^2-1)}{24}$$

۹- فرض کنید برای $k=1,\ldots,n$ داشته باشیم $|z_k|=1$ و نیز $|z|=1$ نشان دهید:

$$\max\Big(\prod_{k=1}^{n}|z-z_k|\Big) \geq 2$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $z_1,\ldots,z_n$، رئوس یک n ضلعی منتظم باشند.