

# بسمه تعالی

سری پنجم (Easy):

## مشتق و کاربرد مشتق

### مسائل ریاضی عمومی I

۱- تحقیق کنید که تابع  $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  که به صورت  $f(x) = \frac{1}{x}$  تعریف می‌شود در هر نقطه از دامنه‌ی تعریفش مشتق‌پذیر است و دستوری برای مشتق آن به دست آورید.

۲- تحقیق کنید که تابع  $g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  که به صورت  $g(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$  تعریف می‌شود در کدام نقاط مشتق‌پذیر است و در کدام نقاط مشتق‌پذیر نیست، دستوری برای مشتق آن بیابید.

۳- در مورد هریک از توابع زیر تحقیق کنید در صفر مشتق‌پذیر است یا خیر.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & f(x) = x|\sin x| \\ \text{ب)} & g(x) = |x|\sin x \\ \text{پ)} & h(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases} \\ \text{ت)} & k(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

۴- در هر مورد تحقیق کنید دو تابع داده شده در نقطه‌ی  $0$  مماس‌اند.

$$\text{الف)} \quad f(x) = x \text{ و } g(x) = -x^3 + x$$

$$\text{ب)} \quad f(x) = |x| \text{ و } g(x) = -|x|^3 + |x|$$

$$\text{پ)} \quad f(x) = x|x| \text{ و } g(x) = x^n \text{ ( } n \text{ عددی طبیعی است و } n \geq 2 \text{)}$$

$$\text{ت)} \quad f(x) = |x| \text{ و } g(x) = |\sin x|$$

۵- فرض کنید تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  در نقطه‌ی  $a$  مشتق‌پذیر باشد.

الف) ثابت کنید حد زیر وجود دارد و برابر با  $f'(a)$  است:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

ب) نشان دهید که اگر حد بالا وجود داشته باشد، لزومی ندارد که تابع در نقطه‌ی  $a$  مشتق پذیر باشد.

۶- در مورد هر یک از عبارتهای زیر بزرگترین زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}$  را پیدا کنید که عبارت داده شده

روی این مجموعه تابعی مشتق پذیر باشد و مشتق تابع را پیدا کنید.

الف)  $\frac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$       ب)  $\frac{1}{\sin x \cos x}$

پ)  $\csc(2x)$       ت)  $x|\sin x|$

ث)  $|x| \sin x$       ج)  $|x|^n$  ( $n$  عددی طبیعی است و  $n \geq 2$ )

چ)  $x + |x + 1|$       ح)  $|x^n - 1|$  ( $n$  عددی طبیعی است)

۷- درستی قضیه‌ی مقدار میانگین را در هر یک از تابعهای زیر روی بازه‌ی داده شده تحقیق کنید.

الف)  $f(x) = x^2 - 3x + 1$  روی  $[0, 2]$ .

ب)  $f(x) = \frac{1-x}{2x-5}$  روی  $[-2, 1]$ .

پ)  $f(x) = \sin x + \cos x$  روی  $[0, \frac{\pi}{4}]$ .

۸- در هر مورد مشخص کنید که تابع داده شده روی کدام بازه‌ها صعودی است و روی کدام بازه‌ها

نزولی. در نقاطی که مشتق تابع صفر است مشخص کنید که تابع ماکسیمم موضعی یا مینیمم موضعی

دارد یا خیر.

الف)  $f(x) = \sin x + \cos x$       ب)  $f(x) = x + \cos x$

پ)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$       ت)  $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x$

ث)  $f(x) = x^{100} - x^{99}$       ج)  $f(x) = x^{101} - x^{100}$

۹- اعداد حقیقی  $p$  و  $q$  داده شده‌اند. معادله‌ی  $x^2 + px + q = 0$  را در نظر بگیرید. ثابت کنید شرطی لازم

و کافی برای اینکه این معادله فقط یک ریشه‌ی حقیقی داشته باشد این است که  $4p^3 + 27q^2 > 0$ .

۱۰- تابعی مشتق پذیر مانند  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  وجود دارد که  $f'(x) = \frac{x^2 \sin x}{1+x^4}$ . ثابت کنید به ازای هر دو عدد

حقیقی مانند  $a$  و  $b$  نابرابری زیر درست است:

$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{4}|a - b|$$

۱۱- اگر  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ، نابرابریهای زیر را ثابت کنید.

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \quad (\text{ب}) \qquad \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (\text{الف})$$

۱۲- به کمک حد  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = 0$  و قضیه مقدار میانگین، ثابت کنید

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = 0$$

۱۳- ثابت کنید تابع  $S$  که در زیر تعریف شده است همه جا مشتق پذیر است و دستور مشتق آن را پیدا کنید:

$$S(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

۱۴- در هر مورد بزرگترین دامنه‌ای را که در آن عبارت داده شده تابعی مشتق پذیر تعریف می‌کند مشخص کنید و مشتق تابع را پیدا کنید.

$$(1 + (1 + x^2)^{10})^{20} \quad (\text{ب}) \qquad (1 + x + x^2 + \dots + x^{10})^5 \quad (\text{الف})$$

$$\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x + 1}} \quad (\text{ت}) \qquad \sqrt{x^4 + x^2 + 1} \quad (\text{پ})$$

$$\sqrt{\frac{\cos x}{x - 1}} \quad (\text{ج}) \qquad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + 1}} \quad (\text{ث})$$

$$\cos^{-1} \sqrt{1 - x^2} \quad (\text{ح}) \qquad \sqrt[5]{(x^2 - 1)^5} \quad (\text{چ})$$

$$\tan^{-1} \frac{1}{x} \quad (\text{د}) \qquad \cos^{-1} \sqrt{x^2 - 1} \quad (\text{خ})$$

۱۵- تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  که به صورت  $f(x) = x^3 + x$  تعریف می‌شود صعودی اکید است (چرا؟)، پس وارونی مانند  $g$  دارد.  $g'(2)$  و  $g''(2)$  را حساب کنید.

۱۶- فرض کنید نمودار تابع مشتق پذیر  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  در نقطه‌ی  $(x_0, x_0)$  بر خط  $y = x$  مماس باشند. ترکیب  $n$  باره‌ی  $f$  با خودش، یعنی  $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_n$ ، را با  $f_n$  نمایش می‌دهیم. ثابت کنید نمودار  $f_n$  نیز در نقطه‌ی  $(x_0, x_0)$  بر خط  $y = x$  مماس است.

۱۷- فرض کنید تابع‌های  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  و  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  طوری باشند که تابع  $g \circ f$  در نقطه‌ی  $a$  مشتق پذیر باشد. آیا می‌توان نتیجه گرفت که  $f$  در نقطه‌ی  $a$  و  $g$  در نقطه‌ی  $f(a)$  مشتق پذیر است.

۱۸- برای باد کردن بادکنکی کروی هوا با سرعت ثابت  $600$  سانتی متر مکعب در ثانیه در بادکنک دمیده می‌شود. وقتی شعاع بادکنک  $15$  سانتی متر باشد، شعاع کره با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟ در این لحظه سطح بادکنک با چه سرعتی رو به افزایش است؟

۱۹- مقدار تقریبی هریک از مقادیر زیر را به روش تقریب خطی حساب کنید، سپس میزان حداکثر خطای محاسبه را با استفاده از مشتق دوم تخمین بزنید.

$$\sqrt[3]{28} \quad (\text{الف}) \qquad (1/0.01)^{10} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{array}{ll} \text{پ) } \sin \frac{1}{100} & \text{ت) } \frac{1}{1001} \\ \text{ث) } \frac{1}{(5701)^2} & \text{ج) } \sqrt{07009} \end{array}$$

۲۰- نشان دهید توابع زیر در دامنه‌ی داده شده از هر مرتبه‌ای مشتق دارند و دستوری برای مشتق  $k$  ام آنها پیدا کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف) } \sin x \text{ روی } \mathbb{R} & \text{ب) } \frac{1}{x} \text{ روی } \mathbb{R} - \{0\} \\ \text{پ) } \frac{1}{x^2} \text{ روی } \mathbb{R} - \{0\} & \text{ت) } \text{چندجمله‌ای درجه‌ی } n \text{ روی } \mathbb{R} \\ \text{ث) } \frac{1}{a+bx} \text{ روی } \mathbb{R} - \left\{-\frac{a}{b}\right\} & \text{ج) } \frac{\sin x}{x} \text{ روی } \mathbb{R} - \{0\} \end{array}$$

۲۱- دایره‌ای به شعاع  $R$  داده شده است.

الف) ثابت کنید در میان مستطیل‌های محاط در این دایره، مربع بیشترین مساحت ممکن را دارد.  
 ب) ثابت کنید در میان مثلث‌های متساوی‌الساقین محاط در این دایره، مثلث متساوی‌الاضلاع بیشترین مساحت ممکن را دارد.

۲۲- ثابت کنید در چندجمله‌ای تیلور تابع فرد، ضریب جمله‌های درجه‌ی زوج صفر است و در چندجمله‌ای تیلور تابع زوج، ضریب جمله‌های درجه‌ی فرد صفر است.

۲۳- اگر  $n$  عددی صحیح باشد، چندجمله‌ای تیلور درجه‌ی ۳ تابع  $(1+x)^{\frac{1}{n}}$  را حول نقطه  $0$  بنویسید. همچنین ثابت کنید که خطای تقریب  $\frac{1}{900} - \frac{1}{30} + 1 \approx \sqrt[3]{1/1}$  از  $10^{-4}$  کمتر است.

۲۴- فرض کنید  $p$  و  $q$  اعدادی طبیعی باشند و  $p < q$ . تابع  $f(x) = px^q - qx^p$  را در نظر بگیرید. نقاط بحرانی این تابع را پیدا کنید و نوع هریک را تعیین کنید.

۲۵- فرض کنید  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  مشتق‌پذیر بوده و به‌ازای هر  $x \in [0, 1]$  داشته باشیم  $f'(x) \neq 1$ . نشان دهید وجود دارد دقیقاً یک  $c \in [0, 1]$  به‌طوری‌که  $f(c) = c$ .

۲۶- فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \mathbb{Q} \\ x & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

ثابت کنید  $f(x)$  در نقطه صفر مشتق‌پذیر است.

۲۷- ثابت کنید توابع  $f(x) = x^2 - \cos x$  و  $g(x) = 2x^2 - x \sin x - \cos x$  دقیقاً دو ریشه دارند.

۲۸- نشان دهید معادله‌ی  $x^2 + \cos^2 x = \cos x$  دقیقاً یک جواب حقیقی دارد.

۲۹- فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی مشتق‌پذیر بوده و به‌ازای هر  $x \in \mathbb{R}$  داشته باشیم  $f'(x)(f(x))' = 0$ . ثابت کنید  $f(x)$  تابعی ثابت است.

۳۰- فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

نشان دهید که صفر یک نقطه‌ی مینیمم موضعی برای  $f$  است و همچنین ثابت کنید  $f'(0) = f''(0) = 0$ .

۳۱- فرض کنید  $f(x)$  روی  $(0, +\infty)$  مشتق‌پذیر باشد و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، آیا می‌توان نتیجه گرفت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .

۳۲- فرض کنید  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  مشتق‌پذیر بوده و  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$ . اگر به‌ازای  $x \in (a, b)$  داشته باشیم  $f'(x) + f^2(x) \geq -1$ . مثالی ارائه دهید که  $b - a = \pi$  باشد و شرایط فوق را داشته باشد.

۳۳- آب با آهنگ ۲ متر مکعب در دقیقه وارد یک منبع مخروطی می‌شود. فرض کنید که شعاع قاعده‌ی این منبع  $a$  متر و ارتفاع آن  $b$  متر است. مطلوب است آهنگ تغییر ارتفاع آب در زمانی که ارتفاع آب  $\frac{b}{4}$  متر باشد.