بسمه تعالی

سری چهارم (Easy):

تابع، حد و پیوستگی

مسائل ریاضی عمومی I

از کتاب Stewart:

صفحه ۸۱ : ۱۲، ۳۸.

صفحه ۹۰ : ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۴۴، ۵۰، ۵۳، ۵۴، ۵۵.

صفحه ۱۰۱ : ۳۹، ۴۱، ۴۴.

صفحه ۱۱۱ : ۱۷، ۱۸، ۲۱، ۲۲، ۲۷، ۲۸، ۳۲، ۳۶، ۴۳، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۵۳، ۵۷، ۵۸.

۱— اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(\frac{x}{x^۲+x+۱}) = \frac{x^۲}{x^۴+x^۲+۱}$، ابتدا ضابطه‌ی $f(x)$ را به‌دست آورید، آیا f تابع است. دامنه و برد آن را بیابید.

۲— a و b اعدادی حقیقی‌اند. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را به‌صورت $f(x) = ax + b$ تعریف می‌کنیم.

الف) ثابت کنید f در هر نقطه‌ی $\mathbb{R}$ پیوسته است. (به‌ویژه، وقتی که $a = ۰$، تابع ثابت در هر نقطه پیوسته است.)

ب) آیا f به‌طور یکنواخت پیوسته است؟

۳— فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n > ۱$. تابع $p(x) = x^n$ را درنظر بگیرید.

الف) ثابت کنید p در هر نقطه‌ی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ب) آیا p به‌طور یکنواخت پیوسته است؟

۴— قاعده رُندکردن عدد $A = a_۰/a_۱a_۲a_۳\cdots$ به $A_n = a_۰/a_۱\cdots a_n$ این است که اگر $۰/۰\cdots۰a_{n+۱}a_{n+۲}\cdots$ از $\frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-n}$ کوچکتر باشد، رقم $a_{n+۱}$ و ارقام بعد از آن را

حذف می‌کنیم و اگر این عدد بزرگتر یا برابر با $\frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-n}$ باشد، عدد A را به $A_n + \frac{۱}{۱۰^n}$ «رُند می‌کنیم» و رقم $a_{n+۱}$ و ارقام پس از آن را حذف می‌کنیم. نمایش اعشاری اعداد نامنفی را در نظر بگیرید و برای اجتناب از ابهام رشته‌های $\cdots ۹۹۹$ پس از ممیز را را افزایش رقم قبلی به ۰ تبدیل کنید. تابع $r_n : [۰, \infty) \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r_n(x) = x_n \qquad \text{(رُند شده‌ی } x \text{ به } n \text{ رقم پس از اعشار)}$$

الف) تابع r_n در کدام نقاط پیوسته است و در کدام نقاط ناپیوسته. نمودار $r_۱$ و $r_۲$ را رسم کنید.

ب) چه رابطه‌ای میان $\lfloor x \rfloor$ و $r_۰(x)$ وجود دارد؟

پ) ضابطه‌ی $r_n(x)$ را با استفاده از $\lfloor x \rfloor$ بیابید.

۵– اگر f و g توابعی پیوسته باشند، نشان دهید توابع

$$\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\} \qquad \text{و} \qquad \phi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

نیز پیوسته‌اند.

۶– ثابت کنید اگر تابع f در نقطه‌ی $x_۰$ پیوسته باشد، $|f|$ نیز در نقطه‌ی $x_۰$ پیوسته است. آیا عکس این مطلب نیز لزوماً درست است؟ $(|f|(x) = |f(x)|)$

۷– فرض کنید $f : S \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی $x_۰$ $(x_۰ \in S)$ پیوسته باشد و $f(x_۰) > ۰$. ثابت کنید عددی مثبت مانند δ وجود دارد که اگر $x \in S$ و $|x - x_۰| < \delta$، آنگاه $f(x) > ۰$.

۸– تابع $g : S \to \mathbb{R}$ کران‌دار است. فرض کنید تابع $f : S \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی $x_۰$ $(x_۰ \in S)$ پیوسته باشد و $f(x_۰) = ۰$. ثابت کنید تابع حاصل‌ضرب f و g، در نقطه‌ی $x_۰$ پیوسته است.

۹– برای هر $n \in \mathbb{N}$، تابع $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{۱}{x} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

را در نظر بگیرید، نشان دهید f_n در ۰ پیوسته است.

۱۰– در مورد هر یک از تابع‌های زیر توضیح دهید که چرا تابع داده شده روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

الف) $\frac{\sin(x^۲ + ۱)}{x^۲ + ۱}$ ب) $\frac{\tan(\sin x)}{x^۴ - x^۲ + ۱}$

۱۱– عدد حقیقی c داده شده است. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{۱}{x} & x \neq ۰ \\ c & x = ۰ \end{cases}$$

ثابت کنید عدد c هر چه باشد، تابع f در نقطه‌ی ۰ پیوسته نیست. آیا این تابع در نقاط دیگر پیوسته است؟

۱۲– آیا تابع $\tan x$ روی $\left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)$ به‌طور یکنواخت پیوسته است؟

۱۳– تابع $f : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(t) = \begin{cases} ۰ & t = ۰ \\ \frac{۱}{t} - \left\lfloor \frac{۱}{t} \right\rfloor & ۰ < t \leq ۱ \end{cases}$$

الف) نقاط پیوستگی و ناپیوستگی f را مشخص کنید.

ب) ثابت کنید عدد $x \in [۰, ۱]$ گویا است، اگر و تنها اگر عددی طبیعی مانند n وجود داشته باشد که $f^n(x) = ۰$ (در اینجا مقصود از f^n، n بار ترکیب f با خودش است: $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$).

پ) تابع $g : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ را به‌صورت $g(t) = tf(t)$ تعریف می‌کنیم. آیا g در نقطه‌ی ۰ پیوسته است؟ نمودار g را رسم کنید.

۱۴– عدد حقیقی a داده شده است. ثابت کنید هر یک از معادله‌های زیر جواب حقیقی دارد.

الف) $x^۵ + x^۲ = a$

ب) $\frac{x^۹ + x^۴ + ۱}{x^۲ + ۱} = a$

پ) $(a^۲ + ۱)\cos x + ۲a = ۰$

ت) $x^۴ + a^۲x^۳ - ۱ = ۰$

۱۵– ثابت کنید معادله‌ی $x^۴ - x^۳ - ۴x^۲ + x + ۲ = ۰$ چهار ریشه‌ی حقیقی دارد.

۱۶– فرض کنید $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد و برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x)$ عددی گویا باشد، نشان دهید f تابعی ثابت است.

۱۷– ثابت کنید تابع‌های $\tan : \left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right) \to \mathbb{R}$ و $\cot : (۰, \pi) \to \mathbb{R}$ پوشا هستند.

۱۸– تابع $f : [-۱, ۱] \to \mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{۱}{x} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

ثابت کنید با اینکه تابع پیوسته نیست، اما ویژگی نقطه بینی (میانی) را دارد.

۱۹– ثابت کنید وارون تابع صعودی (نزولی) نیز صعودی (نزولی) است.

۲۰– نشان دهید توابع $f(x) = x^۳$ و $f(x) = x^۵$ اکیداً صعودی هستند.

۲۱– چندجمله‌ای $p(x) = a_۰ + a_۱x + \cdots + a_nx^n$ را درنظر بگیرید که در آن ضرایب حقیقی‌اند و $a_n \neq ۰$. ثابت کنید:

الف) اگر n عددی فرد باشد، معادله‌ی $p(x) = ۰$ دست‌کم یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

ب) اگر $a_na_۰ < ۰$، معادله‌ی $p(x) = ۰$ دست‌کم یک ریشه‌ی مثبت دارد.

پ) اگر $a_na_۰ < ۰$ و n عددی زوج باشد، معادله‌ی $p(x) = ۰$ دست‌کم یک ریشه‌ی منفی دارد.

ت) اگر $a_na_۰ > ۰$ و n عددی فرد باشد، معادله‌ی $p(x) = ۰$ دست‌کم یک ریشه‌ی منفی دارد.

۲۲– اگر $f(x) = (x-a)^۲(x-b)^۲ + x$ باشد، نشان دهید نشان دهید f مقدار $\frac{a+b}{۲}$ را اختیار می‌کند.

۲۳– مجموعه‌ی نقاط حدی هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $(-۱, ۰) \cup (۰, ۱)$ ب) $(-۱, ۰) \cup (۱, ۲)$

پ) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ ت) $\mathbb{Q}$

ث) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{۱}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$ ج) $\big((-۱, ۰) \cap \mathbb{Q}\big) \cup \big((۰, ۱) \cap \mathbb{Q}'\big)$

که در آن $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ است.

۲۴– نقاط پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ را مشخص کنید.

۲۵– فرض کنید تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد. اگر برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(\frac{x+y}{۲}) = \frac{f(x)+f(y)}{۲}$، نشان دهید $f(x) = ax + b$.

۲۶– فرض کنید f تابعی یک به یک و پیوسته روی فاصله‌ی $[a, b]$ باشد، نشان دهید f روی این فاصله اکیداً یکنواست.

۲۷– آیا تابعی پیوسته روی $\mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری‌که هر خطی که موازی محور y ها نباشد نمودار تابع را در تعداد متناهی نقطه قطع کند.

۲۸– آیا تابعی پیوسته روی $\mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری‌که هر خطی که موازی محور y ها نباشد نمودار تابع را در تعداد نامتناهی نقطه قطع کند.

۲۹– حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $(m, n \in \mathbb{N})$

الف) $\lim_{x \to ۲}(x-۲)(x^۲+۱)$ ب) $\lim_{x \to ۱} \frac{x^۳+۱}{x^۲+۱}$

پ) $\lim_{x \to ۱} \frac{x^۳-۱}{x^۲-۱}$ ت) $\lim_{x \to ۱} \frac{x^m-۱}{x^n-۱}$

ث) $\lim_{x\to ۱} \dfrac{x^{n+۱} - (n+۱)x + n}{x - ۱}$

چ) $\lim_{x\to ۱} \dfrac{x + x^۲ + \cdots + x^n - n}{x - ۱}$

خ) $\lim_{x\to ۱} \dfrac{m}{(۱-x)^m} - \dfrac{n}{(۱-x)^n}$

ذ) $\lim_{x\to ۱} \dfrac{\sqrt[m]{x} - ۱}{\sqrt[n]{x} - ۱}$

ز) $\lim_{x\to ۲} \dfrac{\sqrt[۳]{x-۱} - ۱}{x - ۲}$

س) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+۱}}$

ص) $\lim_{x\to ۰} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$

ط) $\lim_{x\to ۰} (\sin x)\Big(\cos \dfrac{۱}{x}\Big)$

ع) $\lim_{x\to ۰^+} \Big(\dfrac{۱}{x} - \Big\lfloor \dfrac{۱}{x} \Big\rfloor\Big)$

ف) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sin x}$

ک) $\lim_{x\to ۰} \dfrac{\sin x}{\sqrt{۱ - \cos^۳ x}}$

ل) $\lim_{x\to ۰^+} \dfrac{۱ - \cos x}{\sqrt[n]{x}}$

ن) $\lim_{x\to ۰} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[۳]{\cos x}}{\sin^۲ x}$

ه) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{\tan^۳ x - \tan x}{\cos(x + \frac{\pi}{۲})}$

ج) $\lim_{x\to ۰} \dfrac{(\sqrt{۱ + x^۲} + x)^n - (\sqrt{۱ + x^۲} - x)^n}{x}$

ح) $\lim_{x\to ۱} \dfrac{(۱ - \sqrt{x})(۱ - \sqrt[۳]{x}) \cdots (۱ - \sqrt[n]{x})}{(۱-x)^{n-۱}}$

د) $\lim_{x\to a^+} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^۲ - a^۲}}$

ر) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{(x+a_۱)\cdots(x+a_n)} - x$

ژ) $\lim_{x\to ۱} \dfrac{\sqrt[n]{x} - ۱}{x - ۱}$

ش) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt[۳]{x} + \sqrt[۴]{x}}{\sqrt{۲x+۱}}$

ض) $\lim_{x\to ۰} \dfrac{\tan mx}{nx}$

ظ) $\lim_{x\to ۰} \Big(\sin \dfrac{۱}{x}\Big)\Big(\cos \dfrac{۱}{x}\Big)$

غ) $\lim_{x\to ۰^+} \Big(۱ - x\Big\lfloor \dfrac{۱}{x} \Big\rfloor\Big)$

ق) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

گ) $\lim_{x\to ۰^+} x\sqrt{\sin \dfrac{۱}{x}}$

م) $\lim_{x\to+\infty} \sin\sqrt{x+۱} - \sin\sqrt{x}$

و) $\lim_{x\to ۰} \dfrac{\tan(a+۲x) - ۲\tan(a+x) + \tan(a)}{x^۲}$

ی) $\lim_{x\to ۰} \dfrac{\tan(a+x)\tan(a-x) - \tan^۲(a)}{x^۲}$