بسمه تعالی

سری سوم (Easy):

دنباله و سری

مسائل ریاضی عمومی I

از کتاب Stewart:

صفحه ۷۴۷ : ۱۴، ۲۲، ۲۴، ۳۰، ۳۸، ۴۶، ۵۷، ۷۰، ۷۱، ۷۲.

صفحه ۷۵۶ : ۲۱، ۲۸، ۳۲، ۳۴، ۵۰، ۶۴.

صفحه ۷۷۰ : ۸، ۱۰، ۳۰، ۳۲، ۳۷، ۴۵، ۴۶.

۱ــ در هر مورد ثابت کنید که دنباله a_n به صفر همگراست.

الف) $a_n = \frac{1}{n^p}$ (p عددی طبیعی است)

ب) $a_n = \frac{\sin n}{n}$

پ) $a_n = \frac{n}{z^n}$ (z عددی مختلط است و $|z| > 1$)

ت) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

۲ــ در مورد دنباله a_n از اعداد حقیقی می‌نویسیم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

در صورتی که به ازای هر عدد مثبت مانند K، عددی طبیعی مانند N وجود داشته باشد که اگر $n \geq N$، آنگاه $a_n \geq K$.

الف) اگر p عددی طبیعی و a_n دنباله‌ای باشد که در آن

$$a_n = c_0 + c_1 n + \cdots + c_p n^p$$

که در آن $c_۰$، $c_۱$، $\dots$، c_p اعدادی حقیقی‌اند و $c_p \neq ۰$، ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty.$$

ب) فرض کنید c_n دنباله‌ای از اعداد مختلط غیرصفر باشد. ثابت کنید $\lim_{n\to\infty} c_n = ۰$ اگر و تنها اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{|c_n|} = +\infty$.

پ) مفهوم $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ را تعریف کنید. اگر دنباله a_n همان دنباله قسمت (الف) باشد و $c_p < ۰$، ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

۳− فرض کنید p و q اعدادی طبیعی باشند و

$$a_n = \frac{b_۰ + b_۱ n + \cdots + b_p n^p}{c_۰ + c_۱ n + \cdots + c_q n^q}$$

که در آن $b_۰$، $b_۱$، $\dots$، b_p، $c_۰$، $c_۱$، $\dots$، c_q اعدادی حقیقی‌اند که $b_p \neq ۰$ و $c_p \neq ۰$.

الف) ثابت کنید اگر $p < q$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$.

ب) ثابت کنید اگر $p > q$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ ($+\infty$ یا $-\infty$ برحسب اینکه b_p و c_q هم‌علامت باشند یا خیر).

پ) ثابت کنید اگر $p = q$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{b_p}{c_q}$.

۴− فرض کنید c_n دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد و $c_n = a_n + ib_n$. ثابت کنید $\lim_{n\to\infty} c_n = c^*$ اگر و تنها اگر

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{Re}(c^*) \qquad \text{و} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \mathrm{Im}(c^*).$$

۵− همگرایی و واگرایی دنباله‌های زیر را تحقیق کنید.

الف) $\left\{\frac{۲n^۲}{n^۲+۱}\right\}$ ب) $\left\{\frac{۲n}{n^۲+۱}\right\}$

پ) $\left\{۴ - \frac{(-۱)^n}{n}\right\}$ ت) $\left\{(-۱)^{n!}\right\}$

ث) $\left\{\frac{۱-(-۱)^n n}{n}\right\}$ ج) $\left\{\frac{۱-(-۱)^n n}{n^۲}\right\}$

چ) $\left\{\frac{(-i)^n + ۱}{n}\right\}$ ح) $\left\{\frac{۱+۲^n}{۳^n}\right\}$

خ) $\{\sin n\}$ د) $\left\{\sin\frac{۱}{n}\right\}$

ذ) $\left\{n\sin\frac{۱}{n}\right\}$ ر) $\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$

ز) $\{\sin^n n\}$ ژ) $\left\{\sin\frac{n}{۲}\pi\right\}$

س) $\left\{\dfrac{\sin^n n}{\sqrt{n}}\right\}$

ش) $\left\{\dfrac{\sqrt{n}\cos n!}{n+۱}\right\}$

ص) $\left\{\cos\left(\dfrac{n\pi}{۲}\right)\right\}$

ض) $\left\{\left|\cos\left(\dfrac{n\pi}{۲}\right)\right|\right\}$

ط) $\left\{\sin\left(\dfrac{n\pi}{۲}\right)\right\}$

ظ) $\left\{\sin\left(\dfrac{n\pi}{۲}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{۲}\right)\right\}$

ع) $\left\{\sin\left(\dfrac{n\pi}{۲}\right)+\cos\left(\dfrac{n\pi}{۲}\right)\right\}$

غ) $\left\{\left|\sin\left(\dfrac{n\pi}{۲}\right)+\cos\left(\dfrac{n\pi}{۲}\right)\right|\right\}$

ف) $\left\{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n-۱}\right\}$

ق) $\left\{n-\sqrt{n^۲-۴n}\right\}$

ک) $\left\{\sqrt{n^۲+n}-\sqrt{n^۲-۱}\right\}$

گ) $\left\{\sqrt{n^۴+n^۲+۱}-\sqrt{n^۴-n^۲+۱}\right\}$

ل) $\left\{\sqrt{n^۴+n^۲+n}-\sqrt{n^۴-n^۲+n}\right\}$

م) $\left\{\sqrt{n^۴+n^۳+۱}-\sqrt{n^۴-n^۳+۱}\right\}$

ن) $\left\{\sqrt[۳]{n^۳-n^۲}-\sqrt[۳]{n^۳-۱}\right\}$

و) $\left\{\sqrt[۴]{n^۴+n^۳+۱}-\sqrt[۴]{n^۴-n^۳+۱}\right\}$

ه) $\left\{\sqrt[۴]{n^۲+n}-\sqrt[۴]{n^۲-n}\right\}$

ی) $\left\{\sqrt[n]{n^n+۱}-\sqrt[n]{n^n-۱}\right\}$

۶− نشان دهید برای $n\geq ۳$ داریم $۳\leq\left(۱+\dfrac{۱}{n}\right)^n$.

۷− در مورد کران‌داری دنباله‌های زیر را تحقیق کنید.

الف) $\{\sin n\}$

ب) $\{\tan n\}$

پ) $\{\mathrm{Arctan}\, n\}$

ت) $\{\sqrt[n]{n}\}$

۸− فرض کنید a_n و b_n دو دنباله غیرنزولی از اعداد حقیقی نامنفی باشند و به‌ازای عدد طبیعی مانند k،

$$a_n\leq b_n,\qquad n\geq k$$

الف) ثابت کنید اگر دنباله b_n همگرا باشد، دنباله a_n نیز همگراست.

ب) ثابت کنید اگر دنباله a_n واگرا باشد، دنباله b_n نیز واگراست.

۹− فرض کنید a_n و b_n و c_n سه دنباله از اعداد حقیقی باشند و به‌ازای عدد طبیعی مانند k،

$$a_n\leq b_n\leq c_n,\qquad n\geq k$$

ثابت کنید اگر $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ وجود داشته باشند و برابر باشند، $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ نیز وجود دارد و

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n$$

۱۰− حد دنباله‌های زیر را در صورت وجود مشخص نمایید.

الف) $a_۱=۳۶۰$ و $a_{n+۱}=\sin(a_n)$

ب) $a_۱=۰$ و $a_{n+۱}=a_n+\dfrac{۱}{n}$

پ) $a_۱=۰$ و $a_{n+۱}=\sqrt{۳a_n+۱۰}$

ت) $a_۱>۲$ و $a_{n+۱}=\sqrt{۳a_n^۲-۴a_n}$

ث) $a_۱=۱$ و $a_{n+۱}=a_n+\dfrac{۳}{a_{n-۱}}$

ج) $a_۱=۱$ و $a_{n+۱}=\dfrac{۱}{۲}\left(\dfrac{۲}{a_n}+a_n\right)$

۱۱− حاصل $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$ را به‌دست آورید.

۱۲− فرض کنید a و b اعدادی حقیقی و مثبت باشند که $a<b$ و e عددی حقیقی باشد که $|e|$ از a و b کوچکتر است.

الف) در محاسبه حاصل‌ضرب ab، خطای e در کدام‌یک از a و b خطای بزرگتری در محاسبه ab ایجاد می‌کند؟

ب) منظور از خطای نسبی در محاسبه کمیت مثبت c، نسبت $\frac{|e|}{c}$ است، که در اینجا e مقدار خطاست. در محاسبه حاصل‌ضرب ab، خطای نسبی r درصد در کدام‌یک از a و b خطای بزرگتری در محاسبه ab ایجاد می‌کند؟

همین سوال را در مورد خطای نسبی ab پاسخ دهید.

۱۳− فرض کنید a و b اعدادی حقیقی و مثبت باشند و e عددی حقیقی باشد که $|e|$ از a و b کوچکتر است. به سوال‌های (الف) و (ب) در تمرین قبل در مورد محاسبه خارج‌قسمت $\frac{a}{b}$ پاسخ دهید.

۱۴− در محاسبه مجذور عدد ۸٫۱۹۳۴۶۲۰۷۲۵۰۰۰ از چند رقم پس از ممیز استفاده کنیم تا خطای محاسبه از 10^{-3} بزرگتر نشود؟

۱۵− اگر $x=$ ۱٫۳۲۰۹۱۱۸۴۱۹۰۰۰، در محاسبه $\frac{1}{x}$ از چند رقم پس از ممیز x استفاده کنیم تا خطای محاسبه از 10^{-3} بزرگتر نشود؟

۱۶− دنباله a_n را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n\ \text{بار}}$$

ثابت کنید دنباله a_n همگراست و حد آن را حساب کنید.

۱۷− فرض کنید $a_1=1$ و $a_2=1$ و اگر $n\geq 1$،

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

دنباله a_n را دنباله فیبوناچی می‌نامند.

الف) مقدار a_n را به‌ازای $n\leq 10$ حساب کنید.

ب) دنباله b_n را در نظر بگیرید که در آن $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$. ثابت کنید $b_{n+1}=1+\frac{1}{b_n}$. (به رابطه این تساوی و پنتاگرام در بخش ۱ ـ ۱ توجه کنید.)

پ) ثابت کنید دنباله b_n همگراست و حد آن را حساب کنید.

۱۸− فرض کنید دنباله a_n همگرا باشد، نشان دهید $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = 0$.

۱۹− با ارائه مثالی نشان دهید اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = 0$ ، لزومی ندارد که دنباله a_n همگرا باشد.

۲۰− فرض کنید a_n دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که

$$a_1 \leq a_3 \leq a_5 \leq \cdots$$

$$a_2 \geq a_4 \geq a_6 \geq \cdots$$

و به‌ازای هر m و n، $a_{2m+1} \leq a_{2n}$. ثابت کنید اگر

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n+1}) = 0$$

دنباله‌های a_{2n}، a_{2n+1} و a_n هر سه همگرا هستند و به حدی مشترک میل می‌کنند.

۲۱− فرض کنید a و x_0 اعداد مثبتی بوده و تعریف کنید

$$x_n = \frac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\Big)$$

ثابت کنید دنبالهٔ x_n همگرا است و حد آن را بیابید.

۲۲− دنباله a_n به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{3}{2} \\ a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2} \qquad \text{و} \qquad n \geq 2 \end{cases}$$

ثابت کنید a_n همگرا است و حد آن را بیابید.

۲۳− اگر $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ همگرا باشد و نیز $\{m_i\}_{i=1}^{+\infty}$ زیردنباله‌ای (اکیداً صعودی) از اعداد طبیعی باشد قرار دهید:

$$b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{m_1},$$

$$b_2 = a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + \cdots + a_{m_2},$$

$$\vdots$$

$$b_n = a_{m_{n-1}+1} + a_{m_{n-1}+2} + \cdots + a_{m_n},$$

$$\vdots$$

نشان دهید $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ همگرا است و مقدار آن برابر $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ است.

با مثالی نشان دهید عکس این مطلب درست نیست. یعنی دنباله $\{a_n\}$ و زیردنباله $\{m_i\}_{i=1}^{+\infty}$ را طوری بیابید که $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ همگرا ولی $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ واگراست.

۲۴− مقدار سری‌های زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ب) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

پ) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \ln \frac{n(n+۲)}{(n+۱)^۲}$ ت) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{۳+۲^n}{۳^n}$

ث) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{n}{(n+۱)!}$ ج) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{(n-۱)!+n}{(n+۱)!}$

چ) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{۱}{n(n+۱)\cdots(n+m)}$ برای $m \geq ۱$ ح) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{\sin \frac{۱}{n(n+۱)}}{\cos\frac{۱}{n}\cos\frac{۱}{n+۱}}$

۲۵- فرض کنید $\sum_{n=۱}^{+\infty} a_n$ همگرای مطلق و $\sum_{n=۱}^{+\infty} b_n$ همگرا باشد، نشان دهید سری $\sum_{n=۱}^{+\infty} a_nb_n$ همگرای مطلق است.

۲۶- برای هر دو دنباله a_n و b_n نشان دهید:

الف) (نامساوی شوارتز) $\left(\sum_{k=۱}^{n} a_kb_k\right)^۲ \leq \left(\sum_{k=۱}^{n} a_k^۲\right)\left(\sum_{k=۱}^{n} b_k^۲\right)$

ب) (نامساوی مینکوفسکی) $\left(\sum_{k=۱}^{n}(a_k+b_k)^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} \leq \left(\sum_{k=۱}^{n} a_k^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} + \left(\sum_{k=۱}^{n} b_k^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}$

راهنمایی: (الف) داریم: $\sum_{k=۱}^{n} b_k^۲ + ۲x\sum_{k=۱}^{n} a_kb_k + x^۲\sum_{k=۱}^{n} a_k^۲ = \sum_{k=۱}^{n}(xa_k+b_k)^۲ \geq ۰$.

(ب) داریم: $\sum_{k=۱}^{n} b_k^۲ + ۲\sum_{k=۱}^{n} a_kb_k + \sum_{k=۱}^{n} a_k^۲ = \sum_{k=۱}^{n}(a_k+b_k)^۲$.

۲۷- اگر $\sum_{n=۱}^{+\infty} a_n^۲$ و $\sum_{n=۱}^{+\infty} b_n^۲$ همگرا باشند ثابت کنید:

الف) $\sum_{n=۱}^{+\infty} a_nb_n$ همگرای مطلق است. ب) $\sum_{n=۱}^{+\infty}(a_n+b_n)^۲$ نیز همگرا است.

۲۸- نشان دهید اگر $\sum_{n=۱}^{+\infty} a_n^۲$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ همگرای مطلق است.

۲۹- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای مثبت باشد، گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

الف) از دو سری $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{۱}{a_n}$ و $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ فقط یکی می‌تواند همگرا باشد.

ب) از دو سری $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{۱}{a_n}$ و $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{a_n}{n^۲}$ فقط یکی می‌تواند همگرا باشد.

پ) اگر $p > ۲$ نشان دهید هر دو سری $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{۱}{a_n}$ و $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{a_n}{n^p}$ می‌توانند همگرا باشند.

۳۰- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر n،

$$|a_{n+۱} - a_{n+۲}| < \lambda|a_n - a_{n+۱}|$$

که $\lambda \in (۰, ۱)$. ثابت کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای همگرا است.