بسمه تعالی

سری دوم (Easy):

اعداد مختلط

مسائل ریاضی عمومی I

۱− مختصات قطبی هریک از اعداد مختلط زیر را بنویسید.

الف) $(۳,۰)$ ب) $(۰,-۸)$

پ) $(-\pi,-\pi)$ ت) $(\sqrt{۳},-۱)$

۲− در هر مورد مجموع و حاصل‌ضرب عددهای مختلط داده شده را پیدا کنید.

الف) $(-\sqrt{۳},۱)$ و $(۱,\sqrt{۲})$ ب) $(۰,۳)$ و $(-۱,-۱)$

۳− اعداد مختلط زیر را به صورت متعارف $x+iy$ بنویسید.

الف) $(۲-i)^۴$ ب) $(۱+i)^۶-(۱-i)^۶$

پ) $\left(\frac{-۱+i\sqrt{۳}}{۲}\right)^۳$ ت) $\frac{(۲-i)^۲(۳+۴i)}{۲۵}$

ث) $(-۱+i\sqrt{۳})^{۶۰}$ ج) $\left(\frac{۱+i\sqrt{۳}}{۱-i}\right)^{۴۰}$

چ) $\frac{(۲\overline{z}+۵)(\sqrt{۲}-i)}{۲z+۵}$ ح) $\frac{\overline{z}}{z}$

۴− درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

الف) $|z_۱z_۲|=|z_۱||z_۲|$ ب) $\left|\frac{z_۱}{z_۲}\right|=\frac{|z_۱|}{|z_۲|} \qquad z_۲\neq ۰$

پ) $\overline{z_۱+z_۲}=\overline{z_۱}+\overline{z_۲}$ ت) $\overline{z_۱z_۲}=\overline{z_۱}\,\overline{z_۲}$

ث) $z\overline{z}=|z|^۲$ ج) $\big||z_۱|-|z_۲|\big|\leq|z_۱\pm z_۲|\leq|z_۱|+|z_۲|$

چ) $\mathrm{Re}\left(\frac{۱}{z}\right)=\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|^۲} \qquad (z\neq ۰)$ ح) $\mathrm{Im}\left(\frac{۱}{z}\right)=\frac{-\mathrm{Im}(z)}{|z|^۲} \qquad (z\neq ۰)$

۵– ثابت کنید

$$|z_۱ + z_۲|^۲ = |z_۱|^۲ + |z_۲|^۲ + ۲\,\mathrm{Re}(z_۱\overline{z_۲})$$

و نتیجه بگیرید که اگر $z_۱, z_۲ \neq ۰$ و θ زاویه میان نیم‌خط‌های واصل از ۰ به $z_۱$ و $z_۲$ باشد،

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z_۱\overline{z_۲})}{|z_۱|\,|z_۲|}.$$

۶– مکان هندسی نقاط زیر را روی صفحه مختلط به‌دست آورید:

الف) $|z-i| < ۱$

ب) $|z-i| + |z+i| < ۴$

پ) $|z-۱| < |z+۱|$

ت) $|z-۱| < ۲|z+۱|$

ث) $|z-i| > ۲|z+i|$

ج) $|z|^۲ - ۳|z| + ۲ < ۰$

چ) $\arg(z) = \frac{۱۵}{٦}\pi$

ح) $\arg(z^۲) = \frac{\pi}{۳}$

خ) $\arg(z^۳) = \frac{\pi}{۲}$

د) $\mathrm{Re}(z+۱) = |z|$

ذ) $\mathrm{Re}\left(\frac{۱}{۱+z}\right) = ۱$

ر) $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = ۰$

ز) $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| = ۱$

ژ) $\mathrm{Im}(z^۲) = ۴$

س) $\mathrm{Re}\left(\frac{۱}{z}\right) = \frac{۱}{۴}$

ش) $\mathrm{Re}(z^۲) = \mathrm{Im}(z^۲)$

ص) $z^۲ = \overline{z}^۲$

ض) $z(\overline{z}+۲) = ۳$

ط) $\overline{z} = \frac{۱}{z}$

ظ) $z^۴ = \overline{z}^۲$

۷– معادلات زیر را حل کنید.

الف) $z^۳ = -i$

ب) $z^۲ = \frac{۱-i}{۱+i}$

پ) $z^۴ + ۴ = ۰$

ت) $z^n + ۱ = ۰$

ث) $z^n + i = ۰$

ج) $z^n = nz$

چ) $۱ + z^۲ + z^۴ + z^٦ = ۰$

ح) $۱ - z^۲ + z^۴ - z^٦ = ۰$

خ) $z^۲ + (۱-i)z + ۱ + i = ۰$

د) $z^۴ - ۴iz^۳ - ٦z^۲ + ۴iz + ۱ = ۰$

ذ) $z^۳ + ۳z^۲ + ۳z + ۹ = ۰$

ر) $۳z^۳ + ۳z^۲ + z + ۹ = ۰$

ز) $z^n = z^{n+۱}$

ژ) $z^{۲n} + ۵z^n + ٦ = ۰$

س) $z^n + z^{n-۱} + \cdots + z + ۱ = ۰$

ش) $z^{۲n} + z^{۲n-۲} + \cdots + z^۲ + ۱ = ۰$

۸– ثابت کنید

$$\left(\frac{۱+i\tan\theta}{۱-i\tan\theta}\right)^n = \frac{۱+i\tan n\theta}{۱-i\tan n\theta}$$

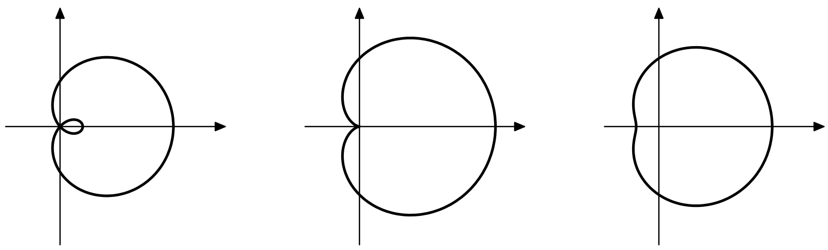
۹– فرض کنید z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند در این صورت نشان دهید:

الف) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$

ب) $|1-\overline{z_1}z_2|^2-|z_1-z_2|^2 = \left(1-|z_1|^2\right)\left(1-|z_2|^2\right)$

پ) اگر $|z_1|=1$ یا $|z_2|=1$ ثابت کنید: $|z_1z_2-1|\le|z_1-1|+|z_2-1|$

۱۰– فرض کنید $a>0$ و $b>0$ داده شده‌اند. مجموعه نقاط به مختصات قطبی (r,θ) که در رابطه‌ی $r=a+b\cos\theta$ صدق می‌کنند یک **حلزونی** نام دارد. تحقیق کنید که در سه‌حالت $a>b$، $a=b$ و $a<b$ شکل‌های زیر برای حلزونی به‌دست می‌آیند:



$a<b$ $\qquad$ $a=b$ $\qquad$ $a>b$

در حالت $a=b$ منحنی را **دلوار** نیز می‌نامند و منحنی $r=1+2\cos\theta$ **ثلث‌ساز** نام دارد، زیرا می‌توان به‌کمک آن ثلث یک زاویه را رسم کرد.

۱۱– تحت انتقال $z\mapsto z+1+i$، دایره‌ی $(x-4)^2+(y+3)^2=4$ به چه مجموعه‌ای نگاشته می‌شود؟ معادله‌ی این مجموعه را پیدا کنید.

۱۲– فرض کنید $z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{C}$، همگی در یک طرف یک خط راست گذرنده از مبداء قرار دارند، نشان دهید: $\sum_{k=1}^{n} z_k\neq 0$ و $\sum_{k=1}^{n} z_k^{-1}\neq 0$.

۱۳– اگر $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ سه نقطه متمایز باشند و $|z_1|=|z_2|=|z_3|\neq 0$ نشان دهید:

z_k ها رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند اگر و تنها اگر $z_1+z_2+z_3=0$.

۱۴– قرار دهید $\omega=e^{\frac{2\pi}{n}i}$، اگر $(j,n)=1$ باشند، نشان دهید:

$$\left\{1,\omega^j,\omega^{2j},\ldots,\omega^{(n-1)j}\right\}=\left\{1,\omega,\omega^2,\ldots,\omega^{n-1}\right\}$$

۱۵– اگر $\omega^n=1$ و $\omega\neq 1$ نشان دهید: $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k=0$

۱۶– قرار دهید $\omega^5=1$ و $\omega\neq 1$، مقدار $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)$ را محاسبه کنید.

۱۷– اگر a_k ها و b_k ها اعدادی حقیقی باشند ثابت کنید:

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)^2}\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2}$$