

انتگرال و کاربرد آن

حل سری سوم:

محمد حسین مشتاق

تهیه و تنظیم:

۱۶، ۱۷ و ۱۸

گروه‌های:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sech} x dx &= \int \frac{2 dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{2e^x dx}{e^{2x} + 1} & \begin{cases} e^x = u \\ e^x dx = du \end{cases} & (۱ - الف) \\ &= \int \frac{2 du}{u^2 + 1} = 2 \operatorname{Arctan} u + c = 2 \operatorname{Arctan} e^x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{csch} x dx &= \int \frac{2 dx}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{2e^x dx}{e^{2x} - 1} & \begin{cases} e^x = u \\ e^x dx = du \end{cases} & (۱ - ب) \\ &= \int \frac{2 du}{u^2 - 1} = \int \frac{du}{u - 1} - \int \frac{du}{u + 1} = \ln \left| \frac{u - 1}{u + 1} \right| + c = \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x(1 + \ln x)} dx & & \begin{cases} 1 + \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{cases} & (۱ - پ) \\ &= \int \frac{u - 1}{u} du = \int \left(1 - \frac{1}{u} \right) du = u - \ln |u| + c \\ &= 1 + \ln x - \ln |1 + \ln x| + c = \ln \left| \frac{x}{1 + \ln x} \right| + c' \quad c' = c + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^{e^x} (1 + \ln x) dx & & \begin{cases} x^{e^x} = u \\ e^x x^{e^x} (1 + \ln x) dx = du \end{cases} & (۱ - ت) \\ &= \int \frac{2 du}{u^2 - 1} = \int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{u}{2} + c = \frac{1}{2} x^{e^x} + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{1 + e^x} = \int \frac{1 + e^x - e^x}{1 + e^x} dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{1 + e^x} \right) dx = x - \ln(1 + e^x) + c = \ln \left(\frac{e^x}{1 + e^x} \right) + c \quad (۱ - ث)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x} + e^{3x} + e^x + 1}{e^x + 2} dx &= \int \left(\frac{e^{2x} + 2e^{3x} - e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}e^x + 1 + \frac{5}{2}e^x}{e^x + 2} \right) dx & (۱ - ج) \\ &= \int \left(e^{2x} - e^x + \frac{1}{2} + \frac{\frac{5}{2}e^x}{e^x + 2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + \frac{1}{2} x + \frac{5}{2} \ln(e^x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}} & & \begin{cases} x^2 + 1 = u^2 \\ 2x dx = 2u du \end{cases} & (۱ - ح) \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{(u^2 - 1)u^2 du}{u} = \frac{2}{3} \int (u^3 - u) du = \frac{2}{15} u^5 - \frac{2}{3} u^3 + c \\ &= \frac{2}{15} (x^2 + 1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^{n+1} (\ln x + \ln x) dx &= \int x^n (1 + \ln x) (x \ln x) dx \\ &\begin{cases} u = x \ln x \\ dv = x^n (1 + \ln x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (1 + \ln x) dx \\ v = x^{n+1} \end{cases} \\ &= x^{n+1} \ln x - \int x^n (1 + \ln x) dx = x^{n+1} \ln x - x^{n+1} + c \end{aligned} \quad (ح-۱)$$

$$\int x^n e^x dx = I_n \quad \begin{cases} u = x^n \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1} dx \\ v = e^x \end{cases} \quad (خ-۱)$$

$$\Rightarrow I_n = x^n e^x - n I_{n-1} \quad , \quad I_0 = e^x + c_0$$

$$\Rightarrow I_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} e^x + c$$

$$\int x^n \ln^m x dx \quad \begin{cases} x^{n+1} = e^u \\ (n+1)x^n dx = e^u du \end{cases} \quad (د-۱)$$

$$\begin{aligned} &= \int \left(\frac{u}{n+1} \right)^m \frac{e^u du}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{m+1}} \int u^m e^u du \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(n+1)^{m+1}} \frac{m!}{(m-k)!} u^{m-k} e^u + c \quad \text{با استفاده از (۱-خ)} \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(n+1)^{m+1}} \frac{m!}{(m-k)!} ((n+1) \ln x)^{m-k} x^{n+1} + c \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(n+1)^{k+1}} \frac{m!}{(m-k)!} x^{n+1} \ln^{m-k} x + c \end{aligned}$$

$$\int x^{n+1} e^{x^r} \quad \begin{cases} u = x^r \\ du = r x dx \end{cases} \quad (ذ-۱)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{r} \int u^n e^u du \quad \text{با استفاده از (۱-خ)} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} u^{n-k} e^u + c = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} x^{r(n-k)} e^{x^r} + c \end{aligned}$$

$$\int \text{Arcsin } x dx \quad \begin{cases} u = \text{Arcsin } x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = x \end{cases} \quad (ز-۱)$$

$$\begin{aligned} &= x \text{Arcsin } x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \begin{cases} u = 1-x^2 \\ du = -2x dx \end{cases} \\ &= x \text{Arcsin } x + \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = x \text{Arcsin } x + \sqrt{u} + c = x \text{Arcsin } x + \sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

$$I = \int e^{ax} \sin(bx) dx \quad \begin{cases} u = \sin(bx) \\ dv = e^{ax} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = b \cos(bx) dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases} \quad (ج-۱)$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx) dx \quad \begin{cases} u = \cos(bx) \\ dv = e^{ax} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -b \sin(bx) dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin(bx) dx \right)$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos(bx) - \frac{b^2}{a^2} I$$

$$\Rightarrow \int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) + c$$

$$\Rightarrow \int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) + c \quad \text{مشابه فوق (ژ-۱)}$$

$$\int \sin(\ln x) dx \quad \left\{ \begin{array}{l} x = e^u \\ dx = e^u du \end{array} \right. \quad (1 - \text{س})$$

$$= \int e^u \sin u du \quad \text{با استفاده از (1 - ج)}$$

$$= \frac{e^u}{\gamma} (\sin u - \cos u) + c = \frac{x}{\gamma} (\sin \ln x - \cos \ln x) + c$$

$$\int \cos^{\gamma} x \sin^{\gamma} x dx = \int \frac{1 + \cos(\gamma x)}{\gamma} \times \frac{1}{\gamma} \sin^{\gamma}(\gamma x) dx \quad (1 - \text{ش})$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left(\underbrace{\int \sin^{\gamma}(\gamma x) dx}_{I_1} + \underbrace{\int \sin^{\gamma}(\gamma x) \cos(\gamma x) dx}_{I_{\gamma}} \right)$$

$$I_1 = \int \left(\frac{1 - \cos(\gamma x)}{\gamma} \right) dx = \frac{x}{\gamma} - \frac{1}{\lambda} \sin(\gamma x) + c_1$$

$$I_{\gamma} = \int u^{\gamma} \frac{du}{\gamma} = \frac{u^{\gamma}}{\gamma} + c_{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \sin^{\gamma}(\gamma x) + c_{\gamma}$$

$$\int \sqrt{1 + \sin x} dx = \int \sqrt{\sin^{\gamma} \left(\frac{x}{\gamma} \right) + \cos^{\gamma} \left(\frac{x}{\gamma} \right) + \gamma \sin \left(\frac{x}{\gamma} \right) \cos \left(\frac{x}{\gamma} \right)} dx = \int \left| \sin \left(\frac{x}{\gamma} \right) + \cos \left(\frac{x}{\gamma} \right) \right| dx \quad (1 - \text{ص})$$

$$= \text{sgn} \left(\sin \left(\frac{x}{\gamma} \right) + \cos \left(\frac{x}{\gamma} \right) \right) \int \left(\sin \left(\frac{x}{\gamma} \right) + \cos \left(\frac{x}{\gamma} \right) \right) dx$$

$$= \text{sgn} \left(\sin \left(\frac{x}{\gamma} \right) + \cos \left(\frac{x}{\gamma} \right) \right) \left(-\gamma \cos \left(\frac{x}{\gamma} \right) + \gamma \sin \left(\frac{x}{\gamma} \right) \right) + c$$

$$\int \frac{\cos^{\Delta} x}{\sin^{\gamma} x} dx = \int \cot^{\Delta} x \sin^{\gamma} x dx = \int \cot^{\Delta} x \csc^{-\gamma} x \csc^{\gamma} x dx \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \cot x \\ du = -\csc^{\gamma} x dx \end{array} \right. \quad (1 - \text{ض})$$

$$= - \int u^{\Delta} (1 + u^{\gamma})^{-\gamma} du = - \int \frac{u^{\Delta} du}{(1 + u^{\gamma})^{\gamma}} \quad \left\{ \begin{array}{l} v = 1 + u^{\gamma} \\ dv = \gamma u^{\gamma-1} du \end{array} \right.$$

$$= -\frac{1}{\gamma} \int \frac{(v-1)^{\gamma} dv}{v^{\gamma}} = -\frac{1}{\gamma} \int \left(1 - \frac{\gamma}{v} + \frac{1}{v^{\gamma}} \right) dv = -\frac{1}{\gamma} v + \ln |v| + \frac{1}{\gamma v} + c$$

$$= -\frac{1+u^{\gamma}}{\gamma} + \ln(1+u^{\gamma}) + \frac{1}{\gamma + \gamma u^{\gamma}} + c$$

$$= -\frac{1 + \cot^{\gamma} x}{\gamma} + \ln(1 + \cot^{\gamma} x) + \frac{1}{\gamma + \gamma \cot^{\gamma} x} + c$$

$$\int \tan^{\gamma n} x dx = \int \left((\tan^{\gamma n} x + \tan^{\gamma n - \gamma} x) - (\tan^{\gamma n - \gamma} x + \tan^{\gamma n - \gamma} x) + \dots \right. \quad (1 - \text{ط})$$

$$\left. + (-1)^{n-1} (\tan^{\gamma} x + 1) + (-1)^n \right) dx$$

$$= \underbrace{\int (-1)^n dx}_{I_1} + \underbrace{\int \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \tan^{\gamma(n-k)} x \right) (\tan^{\gamma} x + 1) dx}_{I_{\gamma}}$$

$$I_1 = (-1)^n x + c_1$$

$$I_{\gamma} = \int \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u^{\gamma(n-k)+1} \right) du \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan x = u \\ (1 + \tan^{\gamma} x) dx = du \end{array} \right.$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\gamma(n-k)+1} u^{\gamma(n-k)+1} + c_{\gamma} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\gamma(n-k)+1} \tan^{\gamma(n-k)+1} x + c_{\gamma}$$

$$\int \tan^{\gamma n - 1} x dx = (-1)^n \ln |\cos x| + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{\gamma(n-k)} \tan^{\gamma(n-k)} x + c \quad (1 - \text{ظ}) \quad \text{مشابه فوق}$$

$$I_n = \int \sin^n x dx \quad \begin{cases} u = \sin^{n-1} x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx \\ v = -\cos x \end{cases} \quad (\text{ع-1})$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{-1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_1 = -\cos x + c_1 \quad , \quad I_2 = \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + c_2$$

$$I_n = \int \cos^n x dx \quad (\text{غ-1}) \quad \text{مشابه فوق}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_1 = \sin x + c_1 \quad , \quad I_2 = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c_2$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int (1 + \tan^2 x)^2 dx \quad \begin{cases} \tan x = u \\ (1 + \tan^2 x) dx = du \end{cases} \quad (\text{ف-1})$$

$$= \int (1 + u^2)^2 du = u + \frac{2}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5 + c = \tan x + \frac{2}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^5 x} \quad \begin{cases} \cos x = u \\ -\sin x dx = du \end{cases} \quad (\text{ق-1})$$

$$= - \int \frac{du}{(1-u^2)^2}$$

$$= \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{(1-u)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{(1+u)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{1-u} + \frac{-\frac{1}{2}}{1+u} \right) du$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{(1-u)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{1-u} + \frac{1}{2} \ln|1-u| + \frac{\frac{1}{2}}{(1+u)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{1+u} - \frac{1}{2} \ln|1+u| + c$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2}{\frac{1}{2}(1-u^2)^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| + c = \frac{-\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos^2 x}{\frac{1}{2} \sin^4 x} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right) + c$$

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2 - a^2} = \int \left(1 + \frac{a^2}{x^2 - a^2} \right) dx \quad \left(\frac{2a^2}{x^2 - a^2} = \frac{a}{x-a} - \frac{ax + a^2}{x^2 + ax + a^2} \right) \quad (\text{ك-1})$$

$$= x + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{x-a} - \frac{a}{2} \int \frac{2x+a}{x^2+ax+a^2} dx - \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{(x+\frac{a}{2})^2 + \frac{3a^2}{4}}$$

$$= x + \frac{a}{2} \ln|x-a| - \frac{a}{2} \ln(x^2+ax+a^2) - \frac{a}{\sqrt{3}a} \text{Arctan} \left(\frac{2x+a}{\sqrt{3}a} \right) + c$$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)^2} \quad \begin{cases} 1+x^2 = u^2 \\ 2x dx = 2u du \end{cases} \quad (\text{گ-1})$$

$$= \int \frac{du}{(u^2-1)u^2} = \int \left(\frac{1}{u^2-1} - \frac{1}{u^2+1} - \frac{1}{u^2} \right) du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + \frac{1}{u} + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} \right) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c$$

$$\int \frac{d\theta}{1 + \cos \theta + \sin \theta} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan(\frac{\theta}{2}) = u \\ \frac{1}{2} (1 + \tan^2(\frac{\theta}{2})) d\theta = du \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{1 - \tan^2(\frac{\theta}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta}{2})} \\ \sin \theta = \frac{2 \tan(\frac{\theta}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta}{2})} \end{array} \right. \quad (2-1)$$

$$= \int \frac{du}{1+u} = \ln|u+1| + c = \ln \left| \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + 1 \right| + c$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a \sin \theta \\ dx = a \cos \theta d\theta \end{array} \right. \quad (3-1)$$

$$= a^2 \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{a^2}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + c$$

$$= \frac{a^2}{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{ax}{2} \cos\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)\right) + c$$

$$= \frac{a^2}{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

$$\int \frac{x\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \sinh \theta \\ dx = \cosh \theta d\theta \\ \cosh \theta = u \\ \sinh \theta d\theta = du \end{array} \right. \quad (4-1)$$

$$= \int \sinh \theta \sqrt{2 - \cosh^2 \theta} d\theta$$

$$= \int \sqrt{3 - u^2} du \quad \text{با استفاده از (1-م)}$$

$$= \frac{3}{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + \frac{u}{2} \sqrt{3 - u^2} + c$$

$$= \frac{3}{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\cosh \theta}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\cosh \theta}{2} \sqrt{3 - \cosh^2 \theta} + c$$

با توجه به $\cosh \theta = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2 + 1}{2(x + \sqrt{x^2 + 1})}$ داریم $\theta = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ و با جایگذاری

حاصل انتگرال به دست می آید.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = u^6 \\ dx = 6u^5 du \end{array} \right. \quad (5-1)$$

$$= \int \frac{6u^5 du}{u^3(\sqrt{x} + u^2)} = 6 \int \frac{u^2 du}{\sqrt{x} + u^2} = 6 \int \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + u^2}\right) du$$

$$= 6u - 12 \operatorname{Arctan} \frac{u}{\sqrt{x}} + c = 6\sqrt[6]{x} - 12 \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} + c$$

$$\int (x^2 + x^3 + x + 1)e^{2x} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 + x^3 + x + 1 \\ dv = e^{2x} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = 2x^2 + 3x^2 + 1 \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right. \quad (6-1)$$

$$= \frac{x^2 + x^3 + x + 1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int (2x^2 + 3x^2 + 1) e^{2x} dx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 2x^2 + 3x^2 + 1 \\ dv = e^{2x} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = 4x^2 + 2 \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right.$$

$$= \frac{2x^2 - x^2 + 1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} \int (2x^2 + 1) e^{2x} dx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 2x^2 + 1 \\ dv = e^{2x} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = 4x \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right.$$

$$= \frac{2x^2 - x^2 + 2x^2 + 2}{2} e^{2x} - \frac{2}{2} \int e^{2x} dx$$

$$= \frac{2x^2 - 2x^2 + 2x + 1}{2} e^{2x} + c$$

$$\int \tanh x dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx \quad \begin{cases} e^x + e^{-x} = u \\ (e^x - e^{-x})dx = du \end{cases} \quad (۱-۱)$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c = \ln(e^x + e^{-x}) + c = \ln(\cosh x) + c'$$

$$\int_0^1 x^r \operatorname{Arctan}(x) dx \quad \begin{cases} u = \operatorname{Arctan}(x) \\ dv = x^r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x^r + 1} \\ v = \frac{x^{r+1}}{r+1} \end{cases} \quad (۲-الف)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x^r}{r} \operatorname{Arctan}(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{r} \int_0^1 \frac{x^r dx}{x^r + 1} \\ &= \frac{\pi}{1+r} - \frac{1}{r} \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^r + 1} \right) dx = \frac{\pi}{1+r} - \frac{1}{r} (x^r - \ln(x^r + 1)) \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{1+r} + \frac{1}{r} (\ln 2 - 1) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \text{ و اینک } I_1 = 1 \text{ و } I_0 = \frac{\pi}{2} \text{ داریم (۱-غ) با استفاده از (۲-ب)}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\Rightarrow I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \times \frac{2k-3}{2k-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times I_0 = \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \binom{2k}{k}}{2^{2k+1}}$$

$$\Rightarrow I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \times \frac{2k-2}{2k-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times I_1 = \frac{2^{2k} (k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k}}{(2k+1) \binom{2k}{k}}$$

$$\int_0^1 x^n \ln^m x dx = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(n+1)^{k+1}} \frac{m!}{(m-k)!} x^{n+1} \ln^{m-k} x \Big|_0^1 = \frac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}} \quad (۲-پ) \text{ با استفاده (۱-د)}$$

$$\int_0^r x \sqrt{16-x^4} dx \quad \begin{cases} x^2 = u \\ 2x dx = du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \rightarrow 4 \\ 2 \rightarrow 4 \end{cases} \quad (۲-ت)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{16-u^2} du$$

که $\sqrt{16-u^2}$ معادله یک نیم دایره به شعاع ۴ است و انتگرال آن روی $[0, 4]$ مساحت ربع دایره می باشد. پس

$$\text{جواب نهایی } = 2\pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (\pi 4^2) \text{ است.}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} \quad \begin{cases} x_k = 2 + \frac{k}{n} \text{ و } \Delta x_k = \frac{1}{n} \\ a = 2 \text{ و } b = 3 \end{cases} \quad (۳-الف)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+k} = \int_2^3 \frac{dx}{x} = \ln |x| \Big|_2^3 = \ln \left(\frac{3}{2} \right)$$

$$\frac{2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + (2n)^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n} \right)^\alpha \frac{1}{n} \quad \begin{cases} x_k = \frac{2k}{n} \text{ و } \Delta x_k = \frac{2}{n} \\ a = 0 \text{ و } b = 2 \end{cases} \quad (۳-ب)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + (2n)^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \frac{1}{2} \int_0^2 x^\alpha dx = \frac{1}{2(\alpha+1)} x^{\alpha+1} \Big|_0^2 = \frac{2^\alpha}{\alpha+1}$$

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{2}{n} \right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = a_n \quad (۳-پ)$$

$$\Rightarrow \ln a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \quad \begin{cases} x_k = 1 + \frac{k}{n} \text{ و } \Delta x_k = \frac{1}{n} \\ a = 1 \text{ و } b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \int_1^2 \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=0}^{2n} (n^2 + k^2)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=0}^{2n} \left(\frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2n}} (n^2 + k^2)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=0}^{2n} \left(1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3-ت)$$

$$\Rightarrow \ln a_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n} \ln \left(1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right) \quad \begin{cases} x_k = \frac{k}{n} \text{ و } \Delta x_k = \frac{1}{n} \\ a = 0 \text{ و } b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n &= \int_0^2 \ln(1 + x^2) dx & \begin{cases} u = \ln(1 + x^2) \\ dv = dx \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{1 + x^2} \\ v = x \end{cases} \\ &= x \ln(1 + x^2) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2x^2 dx}{1 + x^2} = x \ln(1 + x^2) - 2x + 2 \operatorname{Arctan} x \Big|_0^2 \\ &= 2 \ln 5 - 4 + 2 \operatorname{Arctan} 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{(2 \ln 5 - 4 + 2 \operatorname{Arctan}(2))} = \frac{25}{e^4} e^{2 \operatorname{Arctan}(2)}$$

3-ث) قرار دهید $x_k = 2 \left(\frac{k}{n} \right)$ و از آن $(\sqrt[n]{2} - 1) 2 \left(\frac{k}{n} \right)$ ، $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = 2 \left(\frac{k}{n} \right)$ و $a = x_0 = 1$ ، $b = x_n = 2$ ، و چون $\frac{k}{n}$ در سری ظاهر شده از رابطه $\ln 2 \left(\frac{k}{n} \right) = \frac{k}{n} \ln 2$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\sum_{k=0}^n \frac{k 2 \left(\frac{k}{n} \right) (\sqrt[n]{2} - 1)}{n} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=0}^n \ln(x_k) \Delta x_k$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{k 2 \left(\frac{k}{n} \right) (\sqrt[n]{2} - 1)}{n} = \frac{1}{\ln 2} \int_1^2 \ln x dx = \frac{1}{\ln 2} (2 \ln 2 - 1) = 2 - \log_2 e$$

3-ج) قرار دهید $x_k = \frac{2k+1}{2n+1}$ و از آن $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{2}{2n+1}$ ، $a = 0$ و $b = 1$

$$\sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2n^2+n} = \frac{2n+1}{2n} \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2n+1} \cdot \frac{2}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2n^2+n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} \right) \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

4-الف) در بازه $[0, 1]$ داریم $1 \leq x^2 \leq (1+x^2)^2 \leq 4$ و نیز تابع $x \ln x$ در این بازه نامثبت است و مینیمم آن در

$$x = \frac{1}{e} \text{ رخ می‌دهد و برابر } \frac{-1}{e}، \text{ پس } \frac{-1}{4e} < \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \leq 0 \text{ و از آن نتیجه می‌شود } \frac{-1}{4e} < \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \leq 0$$

پس انتگرال مورد نظر همگراست.

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \quad (4-ب)$$

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{1-x^2}} dx \quad \text{و} \quad 0 < \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{1-x} \sqrt[5]{1+x+x^2}} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{1-x}} \quad (4-پ)$$

$$\Rightarrow 0 < I < \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{1-x}} dx = -\frac{5\sqrt{2}}{4} (1-x)^{\frac{4}{5}} \Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

۴- ت) برای هر $A > 0$ تابع $P(x)e^{-x^2}$ پیوسته و در نتیجه کراندار است پس انتگرال پذیر است. فرض کنید $\deg(P) = n$

و قرار دهید $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. فرض کنید $a_n > 0$ داریم $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^{2n+1}} = 0$. پس وجود دارد $A > 0$ که اگر

$x \geq A$ آنگاه $0 < P(x) < x^{2n+1} e^{-x^2}$ پس اگر $x \geq A$ داریم $0 < P(x)e^{-x^2} < x^{2n+1} e^{-x^2}$

$$\begin{aligned} 0 < \int_A^{+\infty} P(x)e^{-x^2} dx &< \int_A^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx \quad \begin{cases} -x^2 = u \\ -2x dx = du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \rightarrow -A^2 \\ +\infty \rightarrow -\infty \end{cases} \\ \int_A^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx &= \int_{-A^2}^{-\infty} (-u)^n e^u du = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \int_{-A^2}^{-\infty} u^n e^u du \end{aligned}$$

با استفاده از (۱-خ)

$$\begin{aligned} &= \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} u^{n-k} e^u \Big|_{-A^2}^{-\infty} \\ &= \frac{-1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} x^{2n-2k} e^{-x^2} \Big|_A^{+\infty} \\ &= \frac{-1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n-2k} e^{-x^2} \right)}_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} A^{2n-2k} e^{-A^2} \end{aligned}$$

پس $\int_A^{+\infty} P(x)e^{-x^2} dx$ همگراست یعنی $\int_0^{+\infty} P(x)e^{-x^2} dx$ همگراست.

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \quad \begin{cases} x = \frac{1}{u} \\ dx = -\frac{du}{u^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \rightarrow 1 \\ +\infty \rightarrow 0 \end{cases} \quad (5-الف)$$

$$= \int_1^0 \frac{u \ln u}{(1+u^2)^2} du = - \int_0^1 \frac{u \ln u}{(1+u^2)^2} du$$

بنابر قسمت (الف) سوال قبل انتگرال فوق همگراست پس:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx &= \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx - \int_0^1 \frac{u \ln u}{(1+u^2)^2} du = 0 \end{aligned}$$

۵- ب) تابع xe^{-x^2} تابعی فرد است و بنابر قسمت (ب) سوال قبل انتگرال این تابع روی $(0, +\infty)$ همگراست پس روی بازه

$(-\infty, 0]$ نیز همگرا و قرینه مقدار انتگرال در $(0, +\infty)$ است پس انتگرال روی $\mathbb{R}$ صفر خواهد بود.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x^2}{x^5} = \frac{1}{3} \quad (6-الف) \quad \text{حد به صورت } \frac{0}{0} \text{ مبهم است، با استفاده از هوییتال داریم:}$$

۶- ب) حد به صورت $\frac{0}{0}$ مبهم است، قبل از هوییتال گرفتن باید تابع تحت انتگرال را تفکیک کنیم:

$$\begin{aligned} \int_0^x ((t-x)\sqrt{\cos t}) dt &= \int_0^x t\sqrt{\cos t} dt - x \int_0^x \sqrt{\cos t} dt \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x ((t-x)\sqrt{\cos t}) dt &\stackrel{\text{Hop}}{=} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \left(x\sqrt{\cos x} - \int_0^x \sqrt{\cos t} dt - x\sqrt{\cos x} \right) &\stackrel{\text{Hop}}{=} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sqrt{\cos x} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g''(x)dx & \quad \begin{cases} u = f(x) \\ dv = g''(x) \end{cases} \implies \begin{cases} du = f'(x) \\ v = g'(x) \end{cases} & (7) \\
= \underbrace{(f(x)g'(x))\Big|_a^b}_{\circ} - \int_a^b f'(x)g'(x)dx & \quad \begin{cases} u = f'(x) \\ dv = g'(x) \end{cases} \implies \begin{cases} du = f''(x) \\ v = g(x) \end{cases} \\
= \underbrace{(-f'(x)g(x))\Big|_a^b}_{\circ} + \int_a^b f''(x)g(x)dx
\end{aligned}$$

دقت شود که چون f'' و g'' روی $[a, b]$ وجود دارد پس f' و g' روی $[a, b]$ پیوسته اند و در نتیجه کران دار هستند و fg' و $f'g$ در نقاط a و b صفر می شوند.

$$f'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (8)$$

$$\implies s(x) = \int_{\circ}^x \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{t}{a}\right)} dt = \int_{\circ}^x \cosh\left(\frac{t}{a}\right) dt = a \sinh\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_{\circ}^x = a \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

(۹) بهتر است منحنی را به صورت $x = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ در نظر بگیریم (با توجه به $x > 0$).

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{y} \implies \text{طول قوس} = \int_{\circ}^2 \sqrt{1+y} dy = \frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\circ}^2 = \frac{14}{3}$$

(۱۰) منحنی یک نیم دایره به شعاع 10 می باشد و طول خواسته شده ربع محیط دایره است که برابر 5π می باشد.

(۱۱) دایره مقطع را $x^2 + y^2 = 1$ و قطر آن را محور x ها می گیریم. اگر صفحه عمود بر محور x ها را در نظر بگیریم،

قاعده جسم را در پاره خطی به طول y قطع می کند و چون زاویه 45° است پس مقطع صفحه مورد نظر با جسم،

مثلثی قائم الزاویه و متساوی الساقین است. بنابراین مساحت سطح مقطع برابر $A(x) = \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(1-x^2)$ است و

$$\text{حجم} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \int_{\circ}^1 (1-x^2) dx = \frac{2}{3}$$

(۱۲) نقطه برخورد دو منحنی را به دست می آوریم:

$$y = |x| \implies x = 2 - x^2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies x = 1, -2$$

$$\begin{aligned}
\text{مساحت} &= \int_{-2}^1 (\sqrt{2-x} - |x|) dx = \int_{-2}^0 (\sqrt{2-x} + x) dx + \int_0^1 (\sqrt{2-x} - x) dx \\
&= \left(-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^0 + \left(-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 \\
&= \left(-\frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{16}{3} - 2\right) + \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{4}{3}\sqrt{2}\right) = \frac{13}{6}
\end{aligned}$$

(۱۳) جسم از دوران $y = \sqrt{\sin x}$ برای $0 \leq x \leq \pi$ حول محور x ها ایجاد می شود

$$\text{حجم} = \pi \int_0^\pi y^2 dx = \pi \int_0^\pi \sin x dx = 2\pi$$