حل سؤال ۱ : اگر $z=x+iy$ بدست می‌آید :

$$T(z)=\frac{i(x+iy)-1}{(x+iy)+1+i}=\frac{-(y+1)+ix}{(1+x)+i(y+1)}$$

$$=\frac{-(y+1)+ix}{(1+x)+i(y+1)}\cdot\frac{(1+x)-i(y+1)}{(1+x)-i(y+1)}=\frac{-(y+1)(x+1)+x(y+1)+i\left(x(1+x)+(y+1)^2\right)}{(1+x)^2+(y+1)^2}$$

(۱ نمره)

برای اینکه $T(z)$ حقیقی باشد لازم و کافی است که قسمت موهومی $T(z)$ برابر صفر باشد یعنی : $\frac{x(x+1)+(y+1)^2}{(x+1)^2+(y+1)^2}=0$ (۱ نمره)

و این نتیجه می‌دهد که $(x+\frac{1}{2})^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$ (۱ نمره) و لذا A روی دایره به مرکز $(-\frac{1}{2},-1)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ قرار دارد. (۱ نمره)

---

حل سؤال ۲ : (الف) به استقرا دیده می‌شود که $0<a_n<4$ . در واقع $a_1=1$ و $a_2=2$ هر دو از ۴ کمترند و اگر $a_n$ و $a_{n+1}$ هر دو از ۴ کمتر باشند داریم : $0<a_{n+2}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}<\sqrt{4}+\sqrt{4}=4$ . (۱/۵ نمره) به استقرا دیده می‌شود که دنباله صعودی است :

داریم $a_1<a_2<a_3$ و اگر $a_n<a_{n+1}$ و $a_{n-1}<a_n$ داریم $a_{n+2}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}>\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}=a_{n+1}$ . (۲ نمره)

(ب) چون دنباله صعودی و از بالا کراندار است پس همگراست (۰/۵ نمره). اگر حد دنباله برابر L باشد داریم : $L=\sqrt{L}+\sqrt{L}$ یعنی $L^2=4L$ .

چون $a_n\geq a_1=1$ پس دنباله نمی‌تواند همگرا به صفر باشد ، لذا جواب $L=0$ قابل قبول نیست (۰/۵ نمره) و بنابراین $L=4$ (۰/۵ نمره).

---

حل سؤال ۳ : (الف) قرار دهید $a_n=\frac{1\times3\times\dots\times(2n-1)}{2\times4\times\dots\times(2n)}$ . چون $\frac{2n+1}{2n+2}<1$ پس $a_{n+1}<a_n$ یعنی دنباله $\{a_n\}$ نزولی است. (۲ نمره)

از طرفی داریم $a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ و این با استقرا به راحتی تحقیق می‌شود. پس حد $\{a_n\}$ برابر صفر است $(0<a_n)$ . (۲ نمره) حال با توجه به اینکه سری داده شده متناوب است و در شرایط تست سری‌های متناوب صدق می‌کند پس سری همگراست. (۱ نمره) اما سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا نیست چرا که $\frac{1}{2n}\leq a_n$ و لذا سری همگرای مشروط است. (۲ نمره)

(ب) می‌دانیم $|S-S_n|<a_{n+1}$ . (۱ نمره) پس باید $a_{n+1}<0/25$ . با راحتی دیده می‌شود $a_5<0/25$ (۱ نمره) پس $S\approx S_4=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}+\frac{5}{16}-\frac{35}{128}$ یا $S\approx\frac{21}{128}$ و خطا از ۰/۲۵ کمتر است. (۱ نمره)

---

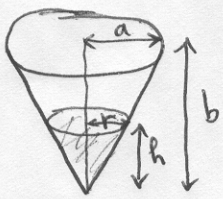
حل سؤال ۴ : اگر $0\leq x<1$ با توجه به اینکه به راحتی دیده می‌شود که $f(x)=f(x^{2^n})$ (۱ نمره) و دنباله $\{x^{2^n}\}$ به صفر همگراست (۱ نمره) ، لذا طبق پیوستگی f در صفر داریم : $f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x^{2^n})=f(\lim_{n\to\infty}x^{2^n})=f(0)$ (۲ نمره) . حال با توجه به پیوستگی f در ۱ و اینکه در نزدیکی ۱ تابع برابر مقدار ثابتی است (مساوی $f(0)$) پس حتماً $f(1)=f(0)$ و f تابعی ثابت است . (۱ نمره)

---

حل سؤال ۵ : بوضوح داریم $P(-a_1)>0$ و $P(-b_1)<0$ و لذا طبق خاصیت مقدار میانی P حتماً ریشه‌ای در $]-b_1,-a_1[$ دارد. (۲ نمره)

بطور مشابه داریم $P(-a_2)<0$ و $P(-b_2)>0$ و لذا مجدداً P ریشه‌ای در $]-b_2,-a_2[$ دارد . (۱ نمره) با ادامه این فرایند می‌بینیم که در انتها داریم $P(-b_n).P(-a_n)<0$ و لذا P ریشه‌ای در $]-b_n,-a_n[$ دارد. (۱ نمره) اینک چون فواصل $]-b_i,-a_i[$ مجزا هستند و تعدادشان n تاست لذا تمام ریشه‌های P بدست آمده‌اند و همگی حقیقی هستند. (۱ نمره)

---




حل سؤال ۶ : فرض کنید وقتی در زمان t ، ارتفاع آب برابر $h(t)$ است ، شعاع دایره سطح آب در مخروط برابر $r(t)$ است . حجم آب برابر می‌شود با : $V(t)=\frac{1}{3}\pi r^2(t)h(t)$ (۱ نمره) .

میدانیم که طبق فرض $\frac{dV}{dt}=2$ (۱ نمره) . از طرفی از تشابه داریم $\frac{r}{h}=\frac{a}{b}$ و لذا $r=\frac{a}{b}h$

و بنابراین : $V(t)=\frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{b^2}h^3(t)$ (۱ نمره) . با مشتق‌گیری داریم : $2=\frac{dV}{dt}=\pi\frac{a^2}{b^2}h^2(t)\frac{dh}{dt}$ و لذا

بدست می‌آید : $\frac{dh}{dt}=\frac{2b^2}{\pi a^2h^2(t)}$ (۱ نمره) . در زمانی که داریم $h(t)=\frac{b}{2}$ خواهیم داشت : $\frac{dh}{dt}=\frac{2b^2}{\pi a^2(\frac{b}{2})^2}=\frac{8}{\pi a^2}$ متر بر دقیقه.

(۱ نمره)