

اعداد حقیقی و اعداد مختلط

سری اول:

حل و راهنمایی برخی از مسائل ریاضی عمومی I

۱- مکان هندسی نقاط زیر را روی صفحه مختلط به دست آورید:

$$(ح) \quad z^4 = \bar{z}^2$$

حل. با اندازه گرفتن از دو طرف داریم: $|z|^4 = |z|^2$ و از آنجا که معادله $x^4 = x^2$ در اعداد حقیقی نامنفی فقط دو جواب $x = 0$ و $x = 1$ دارد، $|z| = 0$ یا $|z| = 1$ ، $z_0 = 0$ در معادله صدق می‌کند. حال فرض کنید $z \neq 0$ ، دو طرف را در z^2 ضرب کنید داریم $z^6 = |z|^2 = 1$ ، پس $z_k = e^{\frac{2k\pi}{6}i}$ که در آن $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. پس این معادله ۷ جواب دارد.

۲- معادلات زیر را حل کنید.

$$(الف) \quad 1 + z^2 + z^4 + z^6 = 0 \quad (ب) \quad 1 - z^2 + z^4 - z^6 = 0$$

حل. معادله (الف) را در $z^2 - 1$ ضرب کنید (با فرض $z \neq \pm 1$).

معادله (ب) را در $z^2 + 1$ ضرب کنید (با فرض $z \neq \pm i$).

$$(چ) \quad z^3 + 3z^2 + 3z + 9 = 0 \quad (ح) \quad 3z^3 + 3z^2 + z + 9 = 0$$

حل. داریم:

$$3z^3 + 3z^2 + z + 9 = 3\left(z + \frac{1}{3}\right)^3 + \frac{8}{9} \quad \text{و} \quad z^3 + 3z^2 + 3z + 9 = (z + 1)^3 + 8$$

۳- عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$(الف) \quad (-1 + i\sqrt{3})^{10} \quad (ب) \quad \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{40}$$

حل. داریم:

$$-1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} \quad \text{و} \quad 1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{\pi}{3}i} \quad \text{و} \quad 1 - i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

۶- معادلات زیر را حل کنید.

$$(x+i)^n - (x-i)^n = 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{الف})$$

حل. داریم:

$$\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n = 1 \implies \cos \theta_k = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad \text{و} \quad \sin \theta_k = \frac{2x}{x^2+1}$$

که در آن $\theta_k = \frac{2k\pi}{n}$ برای $k = 0, 1, \dots, n-1$.

دقت کنید که چون $\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 = 1$ ، اگر جواب هریک از معادلات فوق در دیگری نیز صدق می‌کند.

۷- فرض کنید a و b اعداد مختلط ناصفری باشند و $f(z) = az + bz^{-1}$. تصویر دایره واحد را تحت f مشخص نمایید.

حل. قرار دهید

$$a = |a|e^{i\alpha} \quad \text{و} \quad b = |b|e^{i\beta} \quad \text{و} \quad z = e^{i\theta} \implies \bar{z} = e^{-i\theta}$$

$$\implies f(z) = |a|e^{i(\alpha+\theta)} + |b|e^{i(\beta-\theta)}$$

حال اگر $f(z)$ را حول صفر به اندازه γ دوران دهیم خواهیم داشت:

$$\implies e^{i\gamma} f(z) = |a|e^{i(\alpha+\theta+\gamma)} + |b|e^{i(\beta-\theta+\gamma)}$$

اگر $\gamma = -\frac{\alpha+\beta}{2}$ قرار دهید $\varphi = \theta + \frac{\alpha-\beta}{2}$ نتیجه می‌گیریم:

$$\implies e^{i\gamma} f(z) = |a|e^{i\varphi} + |b|e^{-i\varphi} = \underbrace{(|a|+|b|)\cos\varphi}_x + i \underbrace{(|a|-|b|)\sin\varphi}_y$$

$$\implies \frac{x^2}{(|a|+|b|)^2} + \frac{y^2}{(|a|-|b|)^2} = 1$$

۸- فرض کنید z و w دو عدد مختلط باشند به طوری که $|z|=1$ یا $|w|=1$.

$$\text{اگر } |z\omega| \neq 1 \text{ ثابت کنید } \left|\frac{z-\omega}{1-\bar{z}\omega}\right| = 1.$$

حل. داریم:

$$\frac{z-\omega}{1-\bar{z}\omega} = \frac{1}{\bar{z}} \cdot \frac{z-\omega}{z-\omega} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{z-\omega}{\bar{\omega}-\bar{z}}$$

در صورت سوال شرط $|z\omega| \neq 1$ را می‌توان به شرط $z \neq \omega$ کاهش داد.

۹- فرض کنید $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ همگی در یک طرف یک خط راست گذرنده از مبدا قرار دارند، نشان

$$\text{دهید: } \sum_{k=1}^n z_k \neq 0 \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^n z_k^{-1} \neq 0.$$

حل. خط گذرنده از مبدا یعنی $z = te^{i\theta}$ که در آن $t \in \mathbb{R}$ متغیر است. فرض کنید $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ پس داریم

$$\theta < \theta_k < \pi + \theta \text{ و از آن } 0 < \theta_k - \theta < \pi \text{ و از آن } \operatorname{Im}(e^{i(\theta_k - \theta)}) > 0 \text{ بنابراین}$$

$$\operatorname{Im}\left(e^{-i\theta}\left(\sum_{k=1}^n z_k\right)\right) = \sum_{k=1}^n r_k \operatorname{Im}(e^{i\theta_k - \theta}) > 0$$

$$\implies e^{-i\theta}\left(\sum_{k=1}^n z_k\right) \neq 0 \implies \sum_{k=1}^n z_k \neq 0$$

و نیز $z_k^{-1} = r_k^{-1} e^{-i\theta_k}$ که $-\pi - \theta < -\theta_k < -\theta$ پس z_k^{-1} ها در یک طرف خط $z = te^{-i\theta}$ قرار دارند.

۱۶- ثابت کنید چندجمله‌ای $x^n \sin(\alpha) - \lambda^{n-1} x \sin(n\alpha) + \lambda^n \sin((n-1)\alpha)$ بر چندجمله‌ای $x^2 - 2\lambda \cos(\alpha)x + \lambda^2$ بخش پذیر است.

حل. ریشه‌های $x^2 - 2\lambda \cos(\alpha)x + \lambda^2 = 0$ برابر $x = \lambda(\cos \alpha \pm i \sin \alpha)$ است که در چندجمله‌ای اصلی صدق می‌کنند.

۱۷- ثابت کنید:

$$x^{2n-1} = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{2n} + 1\right) \quad (\text{الف})$$

$$x^{2n+1} - 1 = (x - 1) \prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right) \quad (\text{ب})$$

$$x^{2n+1} + 1 = (x + 1) \prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 + 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + 1\right) \quad (\text{پ})$$

$$x^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 + 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} + 1\right) \quad (\text{ت})$$

حل. هر چندجمله‌ای درجه n مانند $p(x)$ را می‌توان به صورت $c \prod_{k=1}^n (x - x_k)$ نوشت که در آن c ضریب x^n و x_k ها n ریشه‌ی $p(x)$ هستند. ریشه‌های حقیقی را جدا کرده و ریشه‌های غیرحقیقی را دوبه‌دو (به همراه مزدوج) کنار هم بنویسید.

$$20- \sum_{k=1}^{89} 2k \sin((2k)^\circ) = 90 \cot 1^\circ \text{ با اعداد مختلط ثابت کنید } 90 \cot 1^\circ$$

راهنمایی: نخست مجموع $x + 2x^2 + \dots + nx^n$ را بر حسب x حساب کنید سپس فرض کنید

$$\omega = e^{2^\circ i} = \cos 2^\circ + i \sin 2^\circ \text{ حال داریم:}$$

$$\sum_{k=1}^{89} 2k \sin((2k)^\circ) = 2 \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^{89} k \omega^k \right)$$

حل. داریم $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ با مشتق‌گیری داریم $\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$ و از آن

$$:x = \omega \quad \sum_{k=1}^n kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{19} k\omega^k &= \frac{19e^{18^\circ i} - 9e^{180^\circ i} + e^{2^\circ i}}{(e^{2^\circ i} - 1)^2} \\ &= \frac{e^{2^\circ i}(19e^{180^\circ i} - 9e^{178^\circ i} + 1)}{-9e^{2^\circ i}\left(\frac{e^{1^\circ i} - e^{-1^\circ i}}{2i}\right)^2} = \frac{19 + 9e^{178^\circ i}}{9\sin^2(1^\circ)} \\ \Rightarrow \quad \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{19} k\omega^k\right) &= \operatorname{Im}\left(\frac{19 + 9e^{178^\circ i}}{9\sin^2(1^\circ)}\right) = \frac{9}{9\sin^2(1^\circ)} \operatorname{Im}(e^{178^\circ i}) \\ &= \frac{9}{9\sin^2(1^\circ)} \sin(178^\circ) = \frac{9 \sin(2^\circ)}{9\sin^2(1^\circ)} \\ &= \frac{9 \times 2 \sin(1^\circ) \cos(1^\circ)}{9\sin^2(1^\circ)} = \frac{9}{2} \cot(1^\circ) \end{aligned}$$

۲۱- قرار دهید $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ ، اگر $(j, n) = 1$ باشند، نشان دهید:

$$\{(\omega^j)^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\omega^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

حل. وجود دارد $r, s \in \mathbb{Z}$ به‌طوری که $rj + sn = 1$ و از آن نتیجه بگیرید $\omega \in \{(\omega^j)^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.