

انتگرال و کاربرد آن

سری سوم:

محمد حسین مشتاق

تهیه و تنظیم:

۱۶، ۱۷ و ۱۸

گروه‌های:

۱- انتگرال‌های نامعین زیر را محاسبه کنید.

$\int \operatorname{csch} x dx$ (ب)	$\int \operatorname{sech} x dx$ (الف)
$\int x^x (1 + \ln x) dx$ (ت)	$\int \frac{\ln x}{x(1 + \ln x)} dx$ (پ)
$\int \frac{e^{2x} + e^{2x} + e^x + 1}{e^x + 2} dx$ (ج)	$\int \frac{dx}{1 + e^x}$ (ث)
$\int x^{x+1} (\ln^2 x + \ln x) dx$ (ح)	$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ (چ)
$\int x^n \ln^m x dx$ (د)	$\int x^n e^x dx$ (خ)
$\int \operatorname{Arcsin} x dx$ (ز)	$\int x^{n+1} e^{x^2} dx$ (ذ)
$\int e^{ax} \cos(bx) dx$ (ز)	$\int e^{ax} \sin(bx) dx$ (ز)
$\int \cos^4 x \sin^2 x dx$ (ش)	$\int \sin(\ln x) dx$ (س)
$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$ (ض)	$\int \sqrt{1 + \sin x} dx$ (ص)
$\int \tan^{n-1} x dx$ (ظ)	$\int \tan^{2n} x dx$ (ط)
$\int \cos^n x dx$ (غ)	$\int \sin^n x dx$ (ع)
$\int \frac{dx}{\sin^5 x}$ (ق)	$\int \frac{dx}{\cos^3 x}$ (ف)
$\int \frac{dx}{x(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$ (گ)	$\int \frac{x^2 dx}{x^2 - a^2}$ (ک)
$(a > 0) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ (م)	$\int \frac{d\theta}{1 + \cos \theta + \sin \theta}$ (ل)
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4 + \sqrt{x})}$ (و)	$\int \frac{x\sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ (ن)
$\int \tanh x dx$ (ی)	$\int (x^2 + x^2 + x + 1)e^{x^2} dx$ (ه)

۲- انتگرال‌های معین زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & \int_0^1 x^2 \operatorname{Arctan}(x) dx \\ \text{ب)} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n x dx \\ \text{پ)} & \int_0^1 x^n \ln^m x dx \\ \text{ت)} & \int_0^2 x \sqrt{16-x^2} dx \end{array}$$

۳- حد عبارت‌های زیر را در $n \rightarrow +\infty$ محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+k} \\ \text{ب)} & \frac{2^\alpha + 4^\alpha + \dots + (2n)^\alpha}{n^{1+\alpha}} \quad (\alpha > -1) \\ \text{پ)} & \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n}} \\ \text{ت)} & \frac{1}{n^2} \prod_{k=0}^{2n} (n^2 + k^2)^{\frac{1}{n}} \\ \text{ث)} & \sum_{k=0}^n \frac{k^2 \binom{k}{n} (\sqrt[n]{2} - 1)}{n} \\ \text{ج)} & \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{(2n^2+n)} \end{array}$$

۴- همگرایی انتگرال‌های ناسره زیر را بررسی کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \\ \text{ب)} & \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx \\ \text{پ)} & \int_0^1 \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}} dx \\ \text{ت)} & \int_0^{+\infty} P(x) e^{-x^2} dx, \text{ که } P(x) \text{ یک چندجمله‌ایست.} \end{array}$$

۵- با استفاده از سوال قبل مقدار انتگرال‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \\ \text{ب)} & \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx \end{array}$$

۶- حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^6} \int_0^x \sin t^2 dt \\ \text{ب)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x ((t-x)\sqrt{\cos t}) dt \end{array}$$

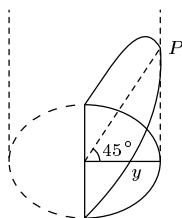
۷- اگر توابع f و g روی $[a, b]$ دارای مشتق دوم باشند و داشته باشیم $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$ آنگاه:

$$\int_a^b f(x) g''(x) dx = \int_a^b f''(x) g(x) dx$$

۸- طول قوس منحنی $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ را از نقطه $(0, a)$ تا نقطه (x, y) به دست آورید.

۹- طول قوس منحنی به معادله $4y^2 = 9x^2$ از $(0, 0)$ تا $(2\sqrt{3}, 3)$ را به دست آورید.

۱۰- طول قوس منحنی به معادله $x = \sqrt{100 - y^2}$ از $x = 10$ تا $y = 10$ را به دست آورید.



۱۱- جسم مقابل (که قسمتی از یک استوانه است) دارای قاعده نیم‌دایره به شعاع واحد بوده و

زاویه صفحه P و صفحه قاعده جسم 45° می‌باشد. حجم این جسم را به دست آورید.

۱۲- مساحت ناحیه محدود به نمودار دو تابع $y = |x|$ و $x = 2 - y^2$ چقدر است؟

۱۳- حجم جسم دوار مقابل را به دست آورید.

