

بسمه تعالی

دنباله و سری

مسائل ریاضی عمومی I

۱- فرض کنید به ازای هر n ، $a_n > 0$ در این صورت ثابت کنید اگر $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ نیز همگراست.

مثالی بزنید که عکس حکم فوق نادرست باشد.

نشان دهید اگر دنباله $\{a_n\}$ یکنوا باشد عکس حکم فوق درست است.

راهنمایی: $(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})^2 = a_{n+1} + a_n - 2\sqrt{a_n a_{n+1}}$ و از آن $\frac{1}{4}(a_n + a_{n+1}) \leq \sqrt{a_n a_{n+1}}$.

۲- فرض کنید a و x_0 اعداد مثبتی بوده و تعریف کنید

$$x_n = \frac{1}{4} \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right)$$

ثابت کنید دنباله x_n همگرا است و حد آن را بیابید.

۳- فرض کنید a_n دنباله‌ای کران‌دار بوده به طوری که به ازای هر n ، $a_{n+1} \geq a_n - \frac{1}{4^n}$. نشان دهید دنباله $\{a_n\}$ همگرا است.

راهنمایی: تعریف کنید $b_n = a_n - \frac{1}{4^{n-1}}$.

۴- فرض کنید a_n یک دنباله بوده به طوری که $a_1 = \frac{3}{4}$ و

$$a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2} \quad \text{و} \quad n \geq 2$$

ثابت کنید a_n همگرا است و حد آن را بیابید.

۵- فرض کنید $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ همگرای مطلق باشند، نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ همگرای مطلق است.

۶- برای هر دو دنباله a_n و b_n نشان دهید:

الف) (نامساوی شوارتز)
$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$$

ب) (نامساوی مینکوفسکی)
$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

راهنمایی: الف) داریم:
$$\sum_{k=1}^n (x a_k + b_k)^2 = x^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2x \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2$$

ب) داریم:
$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2$$

۷- اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ همگرا باشند ثابت کنید:

الف) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ همگرای مطلق است. ب) $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)^2$ نیز همگرا است.

۸- نشان دهید اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ همگرای مطلق است.

۹- به ازای چه مقادیر مثبت x ، سری $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \sqrt[n]{x})$ همگراست؟

راهنمایی: ابتدا فرض کنید $x > 1$ ، از اتحاد $a^n - b^n = (a - b) \left(\sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^{k-1} \right)$ استفاده کنید.

دقت کنید حالت $0 < x < 1$ مشابه حالت $x > 1$ نیست ولی از آن برای تست مقایسه حدی می توان استفاده کرد.

۱۰- اگر $a_1 = x$ و $a_{n+1} = \sqrt{3a_n^2 - 8}$ ، مشخص کنید به ازای چه مقادیری از x ، $\{a_n\}$ همگرا است و

مقدار حد آن را برحسب x مشخص نمایید.