

بسمه تعالی

اعداد حقیقی و اعداد مختلط

سری اول:

مسائل ریاضی عمومی I

۱- مکان هندسی نقاط زیر را روی صفحه مختلط به دست آورید:

الف) $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = 0$ ب) $z(\bar{z} + 2) = 3$

پ) $|\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)| = 1$ ت) $\text{Im}(z^2) = 4$

ث) $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$ ج) $z^2 = \bar{z}^2$

چ) $\bar{z} = \frac{1}{z}$ ح) $z^4 = \bar{z}^2$

۲- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $1 + z^2 + z^4 + z^6 = 0$ ب) $1 - z^2 + z^4 - z^6 = 0$

پ) $z^2 + (1 - i)z + 1 + i = 0$ ت) $z^4 - 4iz^3 - 6z^2 + 4iz + 1 = 0$

ث) $z^4 + 4 = 0$ ج) $z^n + 1 = 0$

چ) $z^3 + 3z^2 + 3z + 9 = 0$ ح) $3z^3 + 3z^2 + z + 9 = 0$

۳- عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف) $(-1 + i\sqrt{3})^{60}$ ب) $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{40}$

۴- فرض کنید z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند در این صورت نشان دهید:

الف) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

ب) $|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$

پ) اگر $|z_1| = 1$ یا $|z_2| = 1$ ثابت کنید: $|z_1 z_2 - 1| \leq |z_1 - 1| + |z_2 - 1|$

۵- ثابت کنید $\left(\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}\right)^n = \frac{1 + i \tan n\theta}{1 - i \tan n\theta}$

۶- معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $(x+i)^n - (x-i)^n = 0 \quad x \in \mathbb{R}$

(ب) $\cos x + i \sin x = \sin x + i \cos x \quad x \in \mathbb{R}$

۷- فرض کنید a و b اعداد مختلط ناصفری باشند و $f(z) = az + bz^{-1}$. تصویر دایره واحد را تحت f مشخص نمایید.

۸- فرض کنید z و w دو عدد مختلط باشند به طوری که $|z| = 1$ یا $|\omega| = 1$.

اگر $|z\omega| \neq 1$ ثابت کنید $\left| \frac{z-\omega}{1-\bar{z}\omega} \right| = 1$.

۹- فرض کنید $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ ، همگی در یک طرف یک خط راست گذرنده از مبدا قرار دارند، نشان

دهید: $\sum_{k=1}^n z_k \neq 0$ و $\sum_{k=1}^n z_k^{-1} \neq 0$.

۱۰- نشان دهید مثلث‌های با رئوس اعداد مختلط z_1, z_2, z_3 و z_4, z_5, z_6 متشابه‌اند اگر و تنها اگر:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \end{bmatrix} = 0$$

۱۱- فرض کنید $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ رئوس یک مثلث هستند. نشان دهید مثلث متساوی الاضلاع است اگر و

تنها اگر، $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$

۱۲- اگر $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ سه نقطه متمایز باشند و $|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$ نشان دهید:

z_k ها رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع هستند اگر و تنها اگر $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

۱۳- فرض کنید z_1, z_2, z_3, z_4 چهار نقطه از صفحه مختلط باشند نشان دهید:

هر چهار نقطه روی یک خط یا یک دایره قرار دارند اگر و تنها اگر $\operatorname{Im} \left(\frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)} \right) = 0$.

۱۴- فرض کنید z_1, z_2, z_3, z_4 چهار نقطه روی منحنی $y = x^2$ در صفحه مختلط باشند نشان دهید:

هر چهار نقطه روی یک دایره قرار دارند اگر و تنها اگر $\operatorname{Re}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) = 0$.

۱۵- فرض کنید z_1 و z_2 و $\dots$ و z_5 اعداد مختلطی باشند که $|z_{i+1} + z_{i+2}| = |z_{i+3} + z_{i+4} + z_{i+5}|$

به ازای $i = 1, 2, \dots, 5$ و $z_{i+5} = z_i$ ثابت کنید $z_1 + z_2 + \dots + z_5 = 0$.

راهنمایی: قرار دهید $S = z_1 + \dots + z_5$ و $S_i = z_{i+1} + z_{i+2}$ در این صورت $|S - S_i| = |S_i|$ ولذا

$|S|^2 = 2 \operatorname{Re}(S_i \bar{S})$ حال نتیجه بگیرید $S = 0$.

۱۶- ثابت کنید چندجمله‌ای $x^n \sin(\alpha) - \lambda^{n-1} x \sin(n\alpha) + \lambda^n \sin((n-1)\alpha)$ بر چندجمله‌ای

$x^2 - 2\lambda \cos(\alpha)x + \lambda^2$ بخش پذیر است.

۱۷- ثابت کنید:

$$x^{\frac{n}{2}} - 1 = (x - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x - \sqrt[2]{x} \cos \frac{\sqrt[2]{k}\pi}{\sqrt[2]{n}} + 1 \right) \quad (\text{الف})$$

$$x^{\frac{n+1}{2}} - 1 = (x - 1) \prod_{k=1}^n \left(x - \sqrt[2]{x} \cos \frac{\sqrt[2]{k}\pi}{\sqrt[2]{n+1}} + 1 \right) \quad (\text{ب})$$

$$x^{\frac{n+1}{2}} + 1 = (x + 1) \prod_{k=0}^{n-1} \left(x + \sqrt[2]{x} \cos \frac{(\sqrt[2]{k}+1)\pi}{\sqrt[2]{n+1}} + 1 \right) \quad (\text{پ})$$

$$x^{\frac{n}{2}} + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x + \sqrt[2]{x} \cos \frac{(\sqrt[2]{k}+1)\pi}{\sqrt[2]{n}} + 1 \right) \quad (\text{ت})$$

۱۸- با استفاده از تمرین قبل ثابت کنید:

$$\prod_{\substack{k=1 \\ \sqrt[2]{k} \neq n}}^n \cos \frac{\sqrt[2]{k}\pi}{\sqrt[2]{n}} = \begin{cases} \frac{n(-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt[2]{n-1}} & n \text{ زوج} \\ \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt[2]{n-1}} & n \text{ فرد} \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{\sqrt[2]{k}\pi}{\sqrt[2]{n+1}} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt[2]{n}} & n \text{ زوج} \\ \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt[2]{n}} & n \text{ فرد} \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos \frac{(\sqrt[2]{k}+1)\pi}{\sqrt[2]{n+1}} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt[2]{n}} & n \text{ زوج} \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt[2]{n}} & n \text{ فرد} \end{cases} \quad (\text{پ})$$

$$\prod_{\substack{k=0 \\ \sqrt[2]{k}+1 \neq n}}^{n-1} \cos \frac{(\sqrt[2]{k}+1)\pi}{\sqrt[2]{n}} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt[2]{n-1}} & n \text{ زوج} \\ \frac{n(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt[2]{n-1}} & n \text{ فرد} \end{cases} \quad (\text{ت})$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{\sqrt[2]{n-1}} \quad (\text{ث})$$

۱۹- برای هر دو عدد حقیقی x و y و عدد طبیعی n نشان دهید:

$$\sum_{k=0}^n \sin(y + kx) = \frac{\sin\left(\frac{n}{\sqrt[2]{2}}x\right) \sin\left(\frac{n+1}{\sqrt[2]{2}}x + y\right)}{\sin\left(\frac{x}{\sqrt[2]{2}}\right)} \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{k=0}^n \cos(y + kx) = \frac{\cos\left(\frac{n}{\sqrt[2]{2}}x\right) \sin\left(\frac{n+1}{\sqrt[2]{2}}x + y\right)}{\sin\left(\frac{x}{\sqrt[2]{2}}\right)} \quad (\text{ب})$$

$$20- \text{ با اعداد مختلط ثابت کنید } \sum_{k=1}^{\wedge 9} \sqrt[2]{k} \sin((\sqrt[2]{k})^\circ) = 9^\circ \cot 1^\circ$$

راهنمایی: نخست مجموع $x + \sqrt[2]{x}^2 + \dots + nx^n$ را برحسب x حساب کنید سپس فرض کنید

$$\omega = e^{\sqrt[2]{2}^\circ i} = \cos \sqrt[2]{2}^\circ + i \sin \sqrt[2]{2}^\circ$$

$$\sum_{k=1}^{\wedge 9} \sqrt[2]{k} \sin((\sqrt[2]{k})^\circ) = \sqrt[2]{2} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^{\wedge 9} k \omega^k \right)$$

۲۱- قرار دهید $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ ، اگر $\omega = 1$ باشد، نشان دهید:

$$\{(\omega^j)^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\omega^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

۲۲- اگر $\omega^n = 1$ و $\omega \neq 1$ نشان دهید:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$$

۲۳- اگر $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ نشان دهید:

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = n$$

۲۴- قرار دهید $\omega^5 = 1$ و $\omega \neq 1$ ، مقدار $(1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega^3)(1 - \omega^4)$ را محاسبه کنید.

۲۵- فرض کنید برای $k = 1, \dots, n$ داشته باشیم $|z_k| = 1$ که $\sum_{k=1}^n z_k = 0$. اگر $z \in \mathbb{C}$ نشان دهید:

$$\sum_{k=1}^n |z - z_k|^2 = n(1 + |z|^2) \quad \text{(الف)}$$

$$\max\{n, n|z|\} \leq \sum_{k=1}^n |z - z_k| \leq n(1 + |z|) \quad \text{(ب)}$$

$$\sum_{k=1}^n |z - z_k| = n \quad \text{پ اگر و تنها اگر } z = 0.$$

۲۶- فرض کنید برای $k = 1, \dots, n$ داشته باشیم $|z_k| = 1$ و نیز $|z| = 1$ نشان دهید:

$$\max \left(\prod_{k=1}^n |z - z_k| \right) \geq 2$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $z_1, \dots, z_n$ ، رئوس یک ضلعی منتظم باشند.

۲۷- فرض کنید $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$. ثابت کنید ریشه‌های چندجمله‌ای

$$z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1z + c_0 = 0$$

در درون دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع $\sqrt{1 + |c_{n-1}|^2 + \dots + |c_0|^2}$ قرار دارند.