

امتحان میان ترم ریاضی عمومی یک - آبان ماه ۱۳۸۴
گروه‌های ۱ تا ۱۸ - تعداد سؤال: ۶ - مدت امتحان: ۳ ساعت
توجه: سؤال ۳، ۱۰ نمره و سایر سؤالها هر یک ۵ نمره دارد (مجموع ۳۵ نمره).

(۱) زیر مجموعه A از مجموعه اعداد مختلط مفروض است. فرض کنید که تصویر A تحت نگاشت $T(z) = \frac{iz-1}{z+1+i}$ زیر مجموعه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی باشد، یعنی فرض کنید که برای هر z در A ، عدد $T(z)$ حقیقی باشد. نشان دهید که A روی یک دایره واقع است. مرکز و شعاع این دایره را مشخص کنید.

(۲) دنباله $\{a_n\}$ بصورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = 2, \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}} & (n \geq 2). \end{cases}$$

(الف) نشان دهید که این دنباله صعودی و کراندار است.

(ب) حد دنباله را بدست آورید.

(۳) سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}$$

مفروض است.

(الف) ثابت کنید که این سری همگرای مشروط است.

(ب) مقدار تقریبی سری را به نحوی محاسبه کنید که خطا کمتر از ۰/۲۵ باشد.

(۴) تابع پیوسته f با دامنه $[0, 1]$ مفروض است. فرض کنید برای هر $x \in [0, 1]$ داشته باشیم $f(x) = f(x^2)$. نشان دهید که f تابعی ثابت است.

(۵) اعداد حقیقی

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n$$

مفروض اند. ثابت کنید که چندجمله‌ای

$$P(x) = (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) + (x + b_1)(x + b_2) \dots (x + b_n)$$

دارای n ریشه حقیقی است.

(۶) آب با آهنگ (سرعت) ۲ متر مکعب در دقیقه وارد یک منبع مخروطی می‌شود (مانند شکل). فرض کنید که شعاع قاعده این منبع a متر و ارتفاع آن b متر است. مطلوب است آهنگ تغییر ارتفاع آب در زمانی که ارتفاع آب $\frac{b}{4}$ متر باشد.

