

بسمه تعالی

چند مسأله ریاضی عمومی I

(۱) نشان دهید $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ تابعی گویا نیست (یعنی نمی‌توان آن را بصورت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن P و Q چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی باشند، نوشت).

(۲) اگر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و $c \in [a, b]$ موجود باشد بطوریکه $f(f(f(c))) = c$ ، آنگاه f روی $[a, b]$ دارای نقطه ثابت است.

(۳) تابعی بسازید که در بی‌نهایت نقطه از قلمرو خود پیوسته و در بی‌نهایت نقطه ناپیوسته باشد.

(۴) اگر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و همه مقادیر $f(x)$ در این فاصله گویا باشند، ثابت کنید f تابعی ثابت است.

(۵) اگر $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و $f(0) = f(1)$ آنگاه برای هر $n \geq 2$ عدد $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ موجود است که $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$. (راهنمایی: ابتدا حالت $n = 2$ را حل کنید).

(۶) حدهای زیر را بدست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{(x+a)(x+b)} - x \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x - \sin 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{(x+1)(x^2+1) \cdots (x^n+1)}{[(nx)^n + 1]^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{2x+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-3)^{2^{\circ}} (3x+2)^{3^{\circ}}}{(2x+1)^{5^{\circ}}}$$

۷) فرض کنید f و g دو تابع پیوسته باشند ثابت کنید $\max(f, g)$ و $\min(f, g)$ توابعی پیوسته می‌باشند.

راهنمایی : $\min(a, b) = \frac{1}{2}|a - b| - \frac{1}{2}(a + b)$ و $\max(a, b) = \frac{1}{2}|a - b| + \frac{1}{2}(a + b)$

۸) $f(0)$ را چنان تعیین کنید که توابع زیر در نقطه $x = 0$ پیوسته باشند.

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{x}\right) \text{ و } f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x} \text{ و } f(x) = \frac{\tan(x)}{x}$$

۹) ثابت کنید معادله $x^4 + 5x^3 + 5x - 1 = 0$ دارای حداقل دو ریشه حقیقی در فاصله $[2, -6]$ می‌باشد.