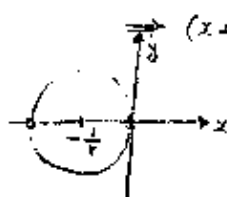


حاصل‌شده است میان‌ترم اول را به دست آوریم

حل سؤال ۱: (۵/۲ نمره)

$$z = x + iy \neq -1 \Rightarrow \frac{1}{1+z} = \frac{1}{(1+x) + iy} \xrightarrow{\text{ضرب در مزدوج}} \frac{(1+x) - iy}{(1+x)^2 + y^2} \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1+z}\right) = \frac{1+x}{(1+x)^2 + y^2} = 1$$



$$(x + \frac{1}{x})^2 + y^2 = \frac{1}{y^2} \quad (x \neq 0) \quad (۵/۲ نمره)$$

این جواب دایره به مرکز $(-\frac{1}{2}, 0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ را استثنای نقطه $(-1, 0)$ است. (۵/۲ نمره)

حل سؤال ۲: (۵/۲ نمره)

روش اول: ابتدا هم برای حالتی که خط مذکور $(1, 0)$ محور x ها باشد ثابت می‌کنیم. با توجه به فرض $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ و همچنین یا منفی مستند بین این مرتبه $\operatorname{Im}(z) = 1$ یا $\operatorname{Im}(z) = -1$ نیز مثبت یا منفی است. در حکم در اینجا ثابت می‌کنیم (۵/۲ نمره)
حال اگر x محور x ها باشد باید دوران خط محور x به محور x ها و در وقت دوران مقدار y به مقدار y تبدیل می‌شود و همان خط می‌شود پس حکم در حالت کلی هم درست می‌آید (۱ نمره)

روش دوم: فرض کنیم $z_1, z_2, \dots, z_n$ در پوشش $\mathbb{C}$ و $z_1, z_2, \dots, z_n$ قرار می‌گیرد پس $z_1, z_2, \dots, z_n$ نیز در نیم صفحه مذکور قرار دارد و لذا می‌توان گفت درست است.

حل سؤال ۳: (۵ نمره)

$$a_1 = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2} \quad a_2 = \frac{17}{12} \quad a_3 = \frac{57}{20} \quad (۵/۲ نمره)$$

ب) با استقرائش می‌توانیم فرض کنیم $a_n \geq 2$ و ثابت می‌کنیم. در ابتدا با استقرائش ثابت می‌کنیم $a_n \geq 2$ و واضح است که

$$a_n \geq 2 \quad \text{و اگر } a_{n-1} \geq 2 \quad \text{فرض استقرائش نگاه } a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}} + a_{n-1} + 2 \right) = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}} + a_{n-1} + 2 \right) \geq 2 \quad (۵/۲ نمره)$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}} - a_{n-1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{a_{n-1}^2 - a_{n-1}^2}{a_{n-1}} \right) = 0 \quad (۵/۲ نمره)$$

اما چون $a_n > 0$ پس $a_{n-1} > 0$ و $a_{n-1}^2 - a_{n-1}^2 = 0$ و لذا $\{a_n\}$ نزولی است $\Leftarrow \{a_n\}$ اگر است (۱ نمره)

ج) اگر حد دنباله a_n را L بگیریم آنگاه $L = a_{n-1}$ پس با گذشتن از رابطه داریم $L = \frac{1}{2} \left(\frac{L^2}{L} + L + 2 \right) = L$ (۵/۲ نمره)

پس $L = 2 \Leftarrow L = \pm \sqrt{2}$ اما چون $a_n \geq 2$ پس $L \geq 2$ و بنا برین $L = 2$ و این قابل قبول می‌باشد پس $L = 2$ (۵/۲ نمره)

حل سؤال ۴: (۳ نمره)

$$\text{واضح است که } \min_{1 \leq k \leq n} f(x_k) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \leq \max_{1 \leq k \leq n} f(x_k) \quad \text{و از قضیه مقدار میانی} \quad c \in [a, b]$$

موجود است که برابر با کسر داده شده باشد.

۵. بنویسید $M \leq f(x) \leq m$
۵. بنویسید M و m به اشتباه با قضیه مقدار میانی
۵. بنویسید (۳ نمره)