

• استفاده از توابع لگاریتم، نمایی و تست انتگرال (برای سریها) مجاز نمی باشد.

(۱) مکان هندسی نقاطی در صفحه اعداد مختلط را مشخص کنید که در رابطه $\operatorname{Re}(\frac{1}{1+z}) = 1$ صدق کنند و شکل آنرا بکشید. (۵/۲ نمره)

(۲) ثابت کنید اگر اعداد مختلط $z_1, z_2, \dots, z_n$ در یک طرف خطی که از مبدأ می گذرد قرار داشته باشند، آنگاه

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n \neq 0$$

(۵/۲ نمره)

(۳) دنباله $\{a_n\}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{a_{n-1}} + a_{n-1} \right), \quad a_0 = 1$$

الف) جملات a_1, a_2, a_3 را در این دنباله محاسبه کنید. (۱ نمره)

ب) نشان دهید دنباله $\{a_n\}$ همگراست. (۳ نمره)

ج) حد آنرا بدست آورید. (۱ نمره)

(۴) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ هستند. نشان دهید نقطه $c \in [a, b]$ وجود دارد که

$$\frac{1}{n} n(n+1) f(c) = f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3) + \dots + nf(x_n)$$

(۳ نمره)

(راهنمایی: $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$)

(۵) الف) نشان دهید برای $n \geq 3$ داریم $n \leq (1 + \frac{1}{n})^n$. (۲ نمره)

ب) نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[n]{n}-1}{n}$ همگراست. (۳ نمره)

ج) با ذکر دلیل مشخص کنید، چند جمله از سری را باید با هم جمع کرد تا مقدار خطا کمتر از $\frac{1}{10}$ شود. (۲ نمره)