

(الف) فرض کنید $z_1, z_2, \dots, z_{17}$ ریشه‌های متمایز معادله $z^{17} - 1 = 0$ باشند. نشان دهید: (۱ نمره)

$$z_1 + z_2 + \dots + z_{17} = 0$$

(ب) اگر $w \neq 1$ یکی از ریشه‌های معادله فوق و $1 \leq k \leq 16$ عددی صحیح باشد، ثابت کنید: (۲ نمره)

$$1 + w^k + w^{2k} + \dots + w^{16k} = 0$$

(۲) تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ که

$$T(e_1) = e_1 + e_2 + 2e_3, T(e_2) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3, T(e_3) = 2e_1 + 5e_2 + 7e_3$$

با فرض این که پایه استاندارد $\mathbb{R}^3$ را تشکیل می‌دهند مفروض است. نشان دهید

$Im(T)$ یک صفحه و $Ker(T)$ یک خط در $\mathbb{R}^3$ است و معادله هر یک را بیابید. (۴ نمره)

(۳) آیا بردارهای زیر تشکیل یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ می‌دهند؟ جواب خود را ثابت کنید. (۳ نمره)

$$u_1 = (1, -2, 0, 0, \dots, 0), u_2 = (0, 1, -2, 0, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$u_{n-1} = (0, \dots, 0, 1, -2), u_n = (-2^{1-n}, 0, \dots, 0, 1)$$

(۴) دو صفحه P و Q را در $\mathbb{R}^4$ در نظر بگیرید به طوری که $P \cap Q = \{0\}$.

(الف) ثابت کنید برای هر $x \in \mathbb{R}^4$ داریم $x = u + v$ که در آن $u \in P$ و $v \in Q$. (۲ نمره)

(ب) ثابت کنید تابع $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ که با ضابطه $f(x) = u$ تعریف شده است یک تبدیل خطی

است و داریم: $f \circ f = f$. (۲ نمره)

(۵) تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ را در نظر می‌گیریم.

(الف) ثابت کنید دو خاصیت زیر معادلند: (۲ نمره)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n; T(x) \cdot T(y) = x \cdot y \quad (i)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n; |T(x) - T(y)| = |x - y| \quad (ii)$$

(ب) اگر A ماتریس تبدیل T دارای خاصیت $A^{-1} = A^t$ باشد، ثابت کنید T دارای خاصیت (الف)

است. (۲ نمره)

(ج) کلیه تبدیلات $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ که دارای خاصیت (ب) باشند را بیابید. (۲ نمره)