حل سؤالات میان ترم اول ریاضی ۱ صفحه ۲

حل سؤال ۵ (گروههای ۳۲-۵) (۷ نمره)

الف) با استفاده از بسط دوجمله‌ای:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\dots+\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 2+\frac{1}{2!}(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+\frac{1}{n!}(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

(استفاده از بسط ۱ نمره)

$$\le 2+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!} \le 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} \le 2+\frac{1}{2}+\dots = 2+1 = 3$$

و بنابراین برای $n\ge 3$ داریم $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 3 \le n$ (۱ نمره).

ب) توجه کنید که دنباله $b_n=\sqrt[n]{n}$ نزولی است زیرا:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}\le 1 \iff (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \le n^{\frac{1}{n}} \iff (n+1)^n \le n^{n+1} \iff \frac{(n+1)^n}{n^n}\le n \iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le n$$

که حکم آخر از الف برقرار است. حال دنباله $a_n=\frac{\sqrt[n]{n}-1}{n}$ نزولی، مثبت و همگرا به صفر است و بنابراین طبق قضیه سری‌های متناوب، سری مذکور همگرا است. (۱ نمره) (۲ نمره)

ج) اگر S_n مجموع جزئی سری $\sum(-1)^{n+1}a_n$ باشد، آنگاه $|S_n - S| \le a_{n+1}$ که S مقدار سری است. حال کافی است n را طوری بیابیم که $a_{n+1}\le\frac{1}{10}$ (۵ نمره). حال با توجه به اینکه $\sqrt[5]{5}\le\frac{3}{2}$ پس $n\ge 5$ جواب است. (۱ نمره) (۵ نمره)

حل سؤال ۵ (گروههای ۴-۱) (۳ نمره)

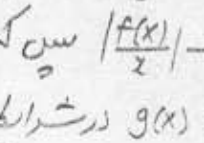
اگر x عددی حقیقی باشد، ثابت می‌کنیم همواره دنباله‌ای از اعداد به شکل $\frac{m}{2^n}$ $(m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N})$ موجود است که به x همگرا باشد. برای $x=0$ که حکم واضح است. با تبدیل x به $-x$ در صورت نیاز می‌توان فرض کرد $x>0$.

حال برای n ثابت عدد طبیعی m موجود است که $\frac{m}{2^n}\le x<\frac{m+1}{2^n}$ (در واقع $m=\max\{i:\frac{i}{2^n}\le x\}$) حال اگر $\frac{m}{2^n}$ را a_n بنامیم (توجه کنید که m به n وابسته است) آنگاه $|a_n-x|\le\frac{1}{2^n}$ و با تغییر مقدار n در اعداد طبیعی دنباله $a_n=\frac{m}{2^n}$ را داریم که به x همگرا است. (۲ نمره)

حال چون f پیوسته است و $a_n\to x$ پس $f(a_n)\to f(x)$ ولی $f(a_n)=0$ و لذا $f(x)=0$. (۱ نمره)

حل سؤال ۶ (گروههای ۴-۱) (۴ نمره)

اگر $x=0$ داریم $|f(0)|\le 0$ پس $f(0)=0$ در این صورت $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le|x|$ و اگر $x\to 0$ از قضیه فشردگی $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\to 0$ پس مشتق در $x=0$ به صفر همگرا است یعنی $f'(0)=0$ (۲ نمره)

اگر تابع $g(x)$ در شرایط $g(0)=0$ و $g'(0)=0$ صدق کند آنگاه مانند آنچه در بالا ثابت شد $f'(0)=0$ و $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\left|\frac{g(x)}{x}\right|$ که وقتی $x\to 0$ طرف راست $g'(0)=0$ و لذا طرف چپ هم صفر می‌شود (۱ نمره). برعکس اگر $f'(0)=0$ اولاً باید $\lim_{x\to 0}g(x)=0$ زیرا در غیر این صورت نمی‌توان نتیجه گرفت f مشتق دارد (مثلاً ) و واضح است که باید $g(0)=0$ یعنی g پیوسته باشد ضمناً باید $g'(0)=0$ زیرا اگر $g(x)=\sin x$ و $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ در این صورت

[illegible] (۱ نمره)