

انتگرال و کاربرد آن

حل سری سوم:

محمد حسین مشتاق

تهیه و تنظیم:

۱۶، ۱۷ و ۱۸

گروه‌های:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sech} x dx &= \int \frac{2 dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{2e^x dx}{e^{2x} + 1} & \begin{cases} e^x = u \\ e^x dx = du \end{cases} & (۱ - الف) \\ &= \int \frac{2 du}{u^2 + 1} = 2 \operatorname{Arctan} u + c = 2 \operatorname{Arctan} e^x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{csch} x dx &= \int \frac{2 dx}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{2e^x dx}{e^{2x} - 1} & \begin{cases} e^x = u \\ e^x dx = du \end{cases} & (۱ - ب) \\ &= \int \frac{2 du}{u^2 - 1} = \int \frac{du}{u - 1} - \int \frac{du}{u + 1} = \ln \left| \frac{u - 1}{u + 1} \right| + c = \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x(1 + \ln x)} dx & & \begin{cases} 1 + \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{cases} & (۱ - پ) \\ &= \int \frac{u - 1}{u} du = \int \left(1 - \frac{1}{u} \right) du = u - \ln |u| + c \\ &= 1 + \ln x - \ln |1 + \ln x| + c = \ln \left| \frac{x}{1 + \ln x} \right| + c' \quad c' = c + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^{e^x} (1 + \ln x) dx & & \begin{cases} x^{e^x} = u \\ e^x x^{e^x} (1 + \ln x) dx = du \end{cases} & (۱ - ت) \\ &= \int \frac{2 du}{u^2 - 1} = \int \frac{du}{u} = \frac{u}{1} + c = \frac{1}{e^x} x^{e^x} + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{1 + e^x} = \int \frac{1 + e^x - e^x}{1 + e^x} dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{1 + e^x} \right) dx = x - \ln(1 + e^x) + c = \ln \left(\frac{e^x}{1 + e^x} \right) + c \quad (۱ - ث)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x} + e^{3x} + e^x + 1}{e^x + 2} dx &= \int \left(\frac{e^{2x} + 2e^{3x} - e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}e^x + 1 + \frac{5}{2}e^x}{e^x + 2} \right) dx & (۱ - ج) \\ &= \int \left(e^{2x} - e^x + \frac{1}{2} + \frac{\frac{5}{2}e^x}{e^x + 2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \ln(e^x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} & & \begin{cases} x^2 + 1 = u^3 \\ 2x dx = 3u^2 du \end{cases} & (۱ - ح) \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{(u^3 - 1)u^2 du}{u} = \frac{2}{3} \int (u^5 - u) du = \frac{2}{3} u^6 - \frac{2}{4} u^4 + c \\ &= \frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{6}{3}} - \frac{2}{4} (x^2 + 1)^{\frac{4}{3}} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^{n+1} (\ln x + \ln x) dx &= \int x^n (1 + \ln x) (x \ln x) dx \\ &\begin{cases} u = x \ln x \\ dv = x^n (1 + \ln x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (1 + \ln x) dx \\ v = x^{n+1} \end{cases} \\ &= x^{n+1} \ln x - \int x^n (1 + \ln x) dx = x^{n+1} \ln x - x^{n+1} + c \end{aligned} \quad (ح-۱)$$

$$\begin{aligned} \int x^n e^x dx &= I_n \quad \begin{cases} u = x^n \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1} dx \\ v = e^x \end{cases} \\ \Rightarrow I_n &= x^n e^x - n I_{n-1} \quad , \quad I_0 = e^x + c_0 \\ \Rightarrow I_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} e^x + c \end{aligned} \quad (خ-۱)$$

$$\begin{aligned} \int x^n \ln^m x dx &\quad \begin{cases} x^{n+1} = e^u \\ (n+1)x^n dx = e^u du \end{cases} \\ &= \int \left(\frac{u}{n+1} \right)^m \frac{e^u du}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{m+1}} \int u^m e^u du \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(n+1)^{m+1}} \frac{m!}{(m-k)!} u^{m-k} e^u + c \quad \text{با استفاده از (۱-خ)} \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(n+1)^{m+1}} \frac{m!}{(m-k)!} ((n+1) \ln x)^{m-k} x^{n+1} + c \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(n+1)^{k+1}} \frac{m!}{(m-k)!} x^{n+1} \ln^{m-k} x + c \end{aligned} \quad (د-۱)$$

$$\begin{aligned} \int x^{n+1} e^{x^2} &\quad \begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x dx \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} \int u^n e^u du \quad \text{با استفاده از (۱-خ)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} u^{n-k} e^u + c = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} x^{2(n-k)} e^{x^2} + c \end{aligned} \quad (ذ-۱)$$

$$\begin{aligned} \int \text{Arcsin } x dx &\quad \begin{cases} u = \text{Arcsin } x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = x \end{cases} \\ &= x \text{Arcsin } x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \begin{cases} u = 1-x^2 \\ du = -2x dx \end{cases} \\ &= x \text{Arcsin } x + \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = x \text{Arcsin } x + \sqrt{u} + c = x \text{Arcsin } x + \sqrt{1-x^2} + c \end{aligned} \quad (ز-۱)$$

$$\begin{aligned} I &= \int e^{ax} \sin(bx) dx \quad \begin{cases} u = \sin(bx) \\ dv = e^{ax} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = b \cos(bx) dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases} \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx) dx \quad \begin{cases} u = \cos(bx) \\ dv = e^{ax} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -b \sin(bx) dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases} \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin(bx) dx \right) \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos(bx) - \frac{b^2}{a^2} I \\ \Rightarrow \int e^{ax} \sin(bx) dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) + c \\ \Rightarrow \int e^{ax} \cos(bx) dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) + c \end{aligned} \quad (ج-۱)$$

(ژ-۱) مشابه فوق

$$\int \sin(\ln x) dx \quad \left\{ \begin{array}{l} x = e^u \\ dx = e^u du \end{array} \right. \quad (1 - \text{س})$$

$$= \int e^u \sin u du \quad \text{با استفاده از (1 - ج)}$$

$$= \frac{e^u}{\gamma} (\sin u - \cos u) + c = \frac{x}{\gamma} (\sin \ln x - \cos \ln x) + c$$

$$\int \cos^{\gamma} x \sin^{\gamma} x dx = \int \frac{1 + \cos(\gamma x)}{\gamma} \times \frac{1}{\gamma} \sin^{\gamma}(\gamma x) dx \quad (1 - \text{ش})$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left(\underbrace{\int \sin^{\gamma}(\gamma x) dx}_{I_1} + \underbrace{\int \sin^{\gamma}(\gamma x) \cos(\gamma x) dx}_{I_{\gamma}} \right)$$

$$I_1 = \int \left(\frac{1 - \cos(\gamma x)}{\gamma} \right) dx = \frac{x}{\gamma} - \frac{1}{\lambda} \sin(\gamma x) + c_1$$

$$I_{\gamma} = \int u^{\gamma} \frac{du}{\gamma} = \frac{u^{\gamma}}{\gamma} + c_{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \sin^{\gamma}(\gamma x) + c_{\gamma}$$

$$\int \sqrt{1 + \sin x} dx = \int \sqrt{\sin^{\gamma} \left(\frac{x}{\gamma} \right) + \cos^{\gamma} \left(\frac{x}{\gamma} \right) + \gamma \sin \left(\frac{x}{\gamma} \right) \cos \left(\frac{x}{\gamma} \right)} dx = \int \left| \sin \left(\frac{x}{\gamma} \right) + \cos \left(\frac{x}{\gamma} \right) \right| dx \quad (1 - \text{ص})$$

$$= \operatorname{sgn} \left(\sin \left(\frac{x}{\gamma} \right) + \cos \left(\frac{x}{\gamma} \right) \right) \int \left(\sin \left(\frac{x}{\gamma} \right) + \cos \left(\frac{x}{\gamma} \right) \right) dx$$

$$= \operatorname{sgn} \left(\sin \left(\frac{x}{\gamma} \right) + \cos \left(\frac{x}{\gamma} \right) \right) \left(-\gamma \cos \left(\frac{x}{\gamma} \right) + \gamma \sin \left(\frac{x}{\gamma} \right) \right) + c$$

$$\int \frac{\cos^{\Delta} x}{\sin^{\gamma} x} dx = \int \cot^{\Delta} x \sin^{\gamma} x dx = \int \cot^{\Delta} x \csc^{-\gamma} x \csc^{\gamma} x dx \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \cot x \\ du = -\csc^{\gamma} x dx \end{array} \right. \quad (1 - \text{ض})$$

$$= - \int u^{\Delta} (1 + u^{\gamma})^{-\gamma} du = - \int \frac{u^{\Delta} du}{(1 + u^{\gamma})^{\gamma}} \quad \left\{ \begin{array}{l} v = 1 + u^{\gamma} \\ dv = \gamma u^{\gamma-1} du \end{array} \right.$$

$$= -\frac{1}{\gamma} \int \frac{(v-1)^{\gamma} dv}{v^{\gamma}} = -\frac{1}{\gamma} \int \left(1 - \frac{\gamma}{v} + \frac{1}{v^{\gamma}} \right) dv = -\frac{1}{\gamma} v + \ln |v| + \frac{1}{\gamma v} + c$$

$$= -\frac{1+u^{\gamma}}{\gamma} + \ln(1+u^{\gamma}) + \frac{1}{\gamma + \gamma u^{\gamma}} + c$$

$$= -\frac{1 + \cot^{\gamma} x}{\gamma} + \ln(1 + \cot^{\gamma} x) + \frac{1}{\gamma + \gamma \cot^{\gamma} x} + c$$

$$\int \tan^{\gamma n} x dx = \int \left((\tan^{\gamma n} x + \tan^{\gamma n - \gamma} x) - (\tan^{\gamma n - \gamma} x + \tan^{\gamma n - \gamma} x) + \dots \right. \quad (1 - \text{ط})$$

$$\left. + (-1)^{n-1} (\tan^{\gamma} x + 1) + (-1)^n \right) dx$$

$$= \underbrace{\int (-1)^n dx}_{I_1} + \underbrace{\int \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \tan^{\gamma(n-k)} x \right) (\tan^{\gamma} x + 1) dx}_{I_{\gamma}}$$

$$I_1 = (-1)^n x + c_1$$

$$I_{\gamma} = \int \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u^{\gamma(n-k)+1} \right) du \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan x = u \\ (1 + \tan^{\gamma} x) dx = du \end{array} \right.$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\gamma(n-k)+1} u^{\gamma(n-k)+1} + c_{\gamma} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\gamma(n-k)+1} \tan^{\gamma(n-k)+1} x + c_{\gamma}$$

$$\int \tan^{\gamma n - 1} x dx = (-1)^n \ln |\cos x| + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{\gamma(n-k)} \tan^{\gamma(n-k)} x + c \quad (1 - \text{ظ}) \quad \text{مشابه فوق}$$

$$I_n = \int \sin^n x dx \quad \begin{cases} u = \sin^{n-1} x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx \\ v = -\cos x \end{cases} \quad (\text{ع-1})$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{-1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_1 = -\cos x + c_1 \quad , \quad I_2 = \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + c_2$$

$$I_n = \int \cos^n x dx \quad (\text{غ-1}) \quad \text{مشابه فوق}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_1 = \sin x + c_1 \quad , \quad I_2 = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c_2$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int (1 + \tan^2 x)^2 dx \quad \begin{cases} \tan x = u \\ (1 + \tan^2 x) dx = du \end{cases} \quad (\text{ف-1})$$

$$= \int (1 + u^2)^2 du = u + \frac{2}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5 + c = \tan x + \frac{2}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^5 x} \quad \begin{cases} \cos x = u \\ -\sin x dx = du \end{cases} \quad (\text{ق-1})$$

$$= - \int \frac{du}{(1-u^2)^2}$$

$$= \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{(1-u)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{(1+u)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{1-u} + \frac{-\frac{1}{2}}{1+u} \right) du$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{(1-u)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{1-u} + \frac{1}{2} \ln|1-u| + \frac{\frac{1}{2}}{(1+u)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{1+u} - \frac{1}{2} \ln|1+u| + c$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2}{\frac{1}{2}(1-u^2)^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| + c = \frac{-\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos^2 x}{\frac{1}{2} \sin^4 x} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right) + c$$

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2 - a^2} = \int \left(1 + \frac{a^2}{x^2 - a^2} \right) dx \quad \left(\frac{2a^2}{x^2 - a^2} = \frac{a}{x-a} - \frac{ax + a^2}{x^2 + ax + a^2} \right) \quad (\text{ك-1})$$

$$= x + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{x-a} - \frac{a}{2} \int \frac{2x+a}{x^2+ax+a^2} dx - \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{(x+\frac{a}{2})^2 + \frac{3a^2}{4}}$$

$$= x + \frac{a}{2} \ln|x-a| - \frac{a}{2} \ln(x^2+ax+a^2) - \frac{a}{\sqrt{3}a} \text{Arctan} \left(\frac{2x+a}{\sqrt{3}a} \right) + c$$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)^2} \quad \begin{cases} 1+x^2 = u^2 \\ 2x dx = 2u du \end{cases} \quad (\text{گ-1})$$

$$= \int \frac{du}{(u^2-1)u^2} = \int \left(\frac{1}{u^2-1} - \frac{1}{u^2} \right) du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + \frac{1}{u} + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} \right) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c$$

$$\int \frac{d\theta}{1 + \cos \theta + \sin \theta} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = u \\ \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)d\theta = du \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ \sin \theta = \frac{2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{array} \right. \quad (2-1)$$

$$= \int \frac{du}{1+u} = \ln|u+1| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + 1\right| + c$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a \sin \theta \\ dx = a \cos \theta d\theta \end{array} \right. \quad (3-1)$$

$$= a^2 \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{a^2}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + c$$

$$= \frac{a^2}{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{ax}{2} \cos\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)\right) + c$$

$$= \frac{a^2}{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

$$\int \frac{x\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \sinh \theta \\ dx = \cosh \theta d\theta \\ \cosh \theta = u \\ \sinh \theta d\theta = du \end{array} \right. \quad (4-1)$$

$$= \int \sinh \theta \sqrt{2 - \cosh^2 \theta} d\theta$$

$$= \int \sqrt{3 - u^2} du \quad \text{با استفاده از (1-م)}$$

$$= \frac{3}{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + \frac{u}{2} \sqrt{3 - u^2} + c$$

$$= \frac{3}{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\cosh \theta}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\cosh \theta}{2} \sqrt{3 - \cosh^2 \theta} + c$$

با توجه به $\cosh \theta = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2 + 1}{2(x + \sqrt{x^2 + 1})}$ داریم $\theta = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ و با جایگذاری

حاصل انتگرال به دست می آید.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x + \sqrt{x})} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = u^2 \\ dx = 2u du \end{array} \right. \quad (5-1)$$

$$= \int \frac{2u^2 du}{u^2(x + u^2)} = 2 \int \frac{u^2 du}{x + u^2} = 2 \int \left(1 - \frac{x}{x + u^2}\right) du$$

$$= 2u - 2x \operatorname{Arctan} \frac{u}{x} + c = 2\sqrt{x} - 2x \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{x}}{x} + c$$

$$\int (x^2 + x^2 + x + 1)e^{2x} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 + x^2 + x + 1 \\ dv = e^{2x} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = 2x^2 + 2x + 1 \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right. \quad (6-1)$$

$$= \frac{x^2 + x^2 + x + 1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int (2x^2 + 2x + 1)e^{2x} dx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 2x^2 + 2x + 1 \\ dv = e^{2x} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = 4x + 2 \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right.$$

$$= \frac{2x^2 - x^2 + 1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} \int (2x + 1)e^{2x} dx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 2x + 1 \\ dv = e^{2x} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = 2 \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right.$$

$$= \frac{2x^2 - x^2 + 2x + 2}{2} e^{2x} - \frac{2}{2} \int e^{2x} dx$$

$$= \frac{2x^2 - 2x^2 + 2x + 1}{2} e^{2x} + c$$

$$\int \tanh x dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx \quad \begin{cases} e^x + e^{-x} = u \\ (e^x - e^{-x})dx = du \end{cases} \quad (۱-۱)$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c = \ln(e^x + e^{-x}) + c = \ln(\cosh x) + c'$$

$$\int_0^1 x^r \operatorname{Arctan}(x) dx \quad \begin{cases} u = \operatorname{Arctan}(x) \\ dv = x^r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x^r + 1} \\ v = \frac{x^{r+1}}{r+1} \end{cases} \quad (۲-الف)$$

$$= \frac{x^{r+1}}{r+1} \operatorname{Arctan}(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{r+1} \int_0^1 \frac{x^{r+1} dx}{x^r + 1}$$

$$= \frac{\pi}{1+r} - \frac{1}{r+1} \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^r + 1} \right) dx = \frac{\pi}{1+r} - \frac{1}{r+1} (x^r - \ln(x^r + 1)) \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{1+r} + \frac{1}{r+1} (\ln 2 - 1)$$

$$\frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \text{ و اینک } I_1 = 1 \text{ و } I_0 = \frac{\pi}{2} \text{ داریم (۱-غ) با استفاده از (۲-ب)}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\Rightarrow I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \times \frac{2k-3}{2k-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times I_0 = \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \binom{2k}{k}}{2^{2k+1}}$$

$$\Rightarrow I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \times \frac{2k-2}{2k-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times I_1 = \frac{2^{2k} (k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k}}{(2k+1) \binom{2k}{k}}$$

$$\int_0^1 x^n \ln^m x dx = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(n+1)^{k+1}} \frac{m!}{(m-k)!} x^{n+1} \ln^{m-k} x \Big|_0^1 = \frac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}} \quad (۱-د) \text{ با استفاده از (۲-پ)}$$

$$\int_0^r x \sqrt{16 - x^4} dx \quad \begin{cases} x^2 = u \\ 2x dx = du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \rightarrow 4 \\ 2 \rightarrow 4 \end{cases} \quad (۲-ت)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{16 - u^2} du$$

که $\sqrt{16 - u^2}$ معادله یک نیم دایره به شعاع ۴ است و انتگرال آن روی $[0, 4]$ مساحت ربع دایره می باشد. پس

$$\text{جواب نهایی } = 2\pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (\pi 4^2) \text{ است.}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} \quad \begin{cases} x_k = 2 + \frac{k}{n} \text{ و } \Delta x_k = \frac{1}{n} \\ a = 2 \text{ و } b = 3 \end{cases} \quad (۳-الف)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+k} = \int_2^3 \frac{dx}{x} = \ln |x| \Big|_2^3 = \ln \left(\frac{3}{2} \right)$$

$$\frac{2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + (2n)^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n} \right)^\alpha \frac{1}{n} \quad \begin{cases} x_k = \frac{2k}{n} \text{ و } \Delta x_k = \frac{2}{n} \\ a = 0 \text{ و } b = 2 \end{cases} \quad (۳-ب)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + (2n)^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \frac{1}{2} \int_0^2 x^\alpha dx = \frac{1}{2(\alpha+1)} x^{\alpha+1} \Big|_0^2 = \frac{2^\alpha}{\alpha+1}$$

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{2}{n} \right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = a_n \quad (۳-پ)$$

$$\Rightarrow \ln a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \quad \begin{cases} x_k = 1 + \frac{k}{n} \text{ و } \Delta x_k = \frac{1}{n} \\ a = 1 \text{ و } b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \int_1^2 \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=0}^{2n} (n^2 + k^2)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=0}^{2n} \left(\frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2n}} (n^2 + k^2)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=0}^{2n} \left(1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3-ت)$$

$$\Rightarrow \ln a_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n} \ln \left(1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right) \quad \begin{cases} x_k = \frac{k}{n} \text{ و } \Delta x_k = \frac{1}{n} \\ a = 0 \text{ و } b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n &= \int_0^2 \ln(1 + x^2) dx & \begin{cases} u = \ln(1 + x^2) \\ dv = dx \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{1 + x^2} \\ v = x \end{cases} \\ &= x \ln(1 + x^2) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2x^2 dx}{1 + x^2} = x \ln(1 + x^2) - 2x + 2 \operatorname{Arctan} x \Big|_0^2 \\ &= 2 \ln 5 - 4 + 2 \operatorname{Arctan} 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{(2 \ln 5 - 4 + 2 \operatorname{Arctan}(2))} = \frac{25}{e^4} e^{2 \operatorname{Arctan}(2)}$$

3-ث) قرار دهید $x_k = 2 \left(\frac{k}{n} \right)$ و از آن $\left(\sqrt[n]{2} - 1 \right) 2 \left(\frac{k}{n} \right) = \Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ و $a = x_0 = 1$ و $b = x_n = 2$ و چون $\frac{k}{n}$ در سری ظاهر شده از رابطه $\ln 2 \left(\frac{k}{n} \right) = \frac{k}{n} \ln 2$ استفاده می کنیم و داریم:

$$\sum_{k=0}^n \frac{k 2^{\left(\frac{k}{n} \right)} \left(\sqrt[n]{2} - 1 \right)}{n} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=0}^n \ln(x_k) \Delta x_k$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{k 2^{\left(\frac{k}{n} \right)} \left(\sqrt[n]{2} - 1 \right)}{n} = \frac{1}{\ln 2} \int_1^2 \ln x dx = \frac{1}{\ln 2} (2 \ln 2 - 1) = 2 - \log_2 e$$

3-ج) قرار دهید $x_k = \frac{2k+1}{2n+1}$ و از آن $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{2}{2n+1}$ و $a = 0$ و $b = 1$

$$\sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2n^2+2n} = \frac{2n+1}{2n} \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2n+1} \cdot \frac{2}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2n^2+2n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} \right) \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

4-الف) در بازه $[0, 1]$ داریم $1 \leq x^2 \leq (1+x^2)^2 \leq 4$ و نیز تابع $x \ln x$ در این بازه نامثبت است و مینیمم آن در

$$x = \frac{1}{e} \text{ رخ می دهد و برابر } \frac{-1}{e} \text{، پس } \frac{-1}{4e} < \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \leq 0 \text{ و از آن نتیجه می شود } \frac{-1}{4e} < \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \leq 0$$

پس انتگرال مورد نظر همگراست.

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \quad (4-ب)$$

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{1-x^2}} dx \quad \text{و} \quad 0 < \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{1-x} \sqrt[5]{1+x+x^2}} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{1-x}} \quad (4-پ)$$

$$\Rightarrow 0 < I < \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{1-x}} dx = -\frac{5\sqrt{2}}{4} (1-x)^{\frac{4}{5}} \Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

۴- ت) برای هر $A > 0$ تابع $P(x)e^{-x^2}$ پیوسته و در نتیجه کراندار است پس انتگرال پذیر است. فرض کنید $\deg(P) = n$

و قرار دهید $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. فرض کنید $a_n > 0$ داریم $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^{2n+1}} = 0$. پس وجود دارد $A > 0$ که اگر $x \geq A$ آنگاه $0 < P(x) < x^{2n+1} e^{-x^2}$ پس اگر $x \geq A$ داریم $0 < P(x)e^{-x^2} < x^{2n+1} e^{-x^2}$

$$0 < \int_A^{+\infty} P(x)e^{-x^2} dx < \int_A^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx \quad \begin{cases} -x^2 = u \\ -2x dx = du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \rightarrow -A^2 \\ +\infty \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\int_A^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx = \int_{-A^2}^{-\infty} (-u)^n e^u du = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \int_{-A^2}^{-\infty} u^n e^u du$$

با استفاده از (۱-خ)

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} u^{n-k} e^u \Big|_{-A^2}^{-\infty}$$

$$= \frac{-1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} x^{2n-2k} e^{-x^2} \Big|_A^{+\infty}$$

$$= \frac{-1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n-2k} e^{-x^2} \right)}_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} A^{2n-2k} e^{-A^2}$$

پس $\int_A^{+\infty} P(x)e^{-x^2} dx$ همگراست یعنی $\int_0^{+\infty} P(x)e^{-x^2} dx$ همگراست.

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \quad \begin{cases} x = \frac{1}{u} \\ dx = -\frac{du}{u^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \rightarrow 1 \\ +\infty \rightarrow 0 \end{cases} \quad (5-الف)$$

$$= \int_1^0 \frac{u \ln u}{(1+u^2)^2} du = - \int_0^1 \frac{u \ln u}{(1+u^2)^2} du$$

بنابر قسمت (الف) سوال قبل انتگرال فوق همگراست پس:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx - \int_0^1 \frac{u \ln u}{(1+u^2)^2} du = 0$$

۵- ب) تابع xe^{-x^2} تابعی فرد است و بنابر قسمت (ب) سوال قبل انتگرال این تابع روی $(0, +\infty)$ همگراست پس روی بازه

$(-\infty, 0]$ نیز همگرا و قرینه مقدار انتگرال در $(0, +\infty)$ است پس انتگرال روی $\mathbb{R}$ صفر خواهد بود.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x^2}{x^5} = \frac{1}{3} \quad (6-الف) \quad \text{حد به صورت } \frac{0}{0} \text{ مبهم است، با استفاده از هوییتال داریم:}$$

۶- ب) حد به صورت $\frac{0}{0}$ مبهم است، قبل از هوییتال گرفتن باید تابع تحت انتگرال را تفکیک کنیم:

$$\int_0^x ((t-x)\sqrt{\cos t}) dt = \int_0^x t\sqrt{\cos t} dt - x \int_0^x \sqrt{\cos t} dt$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x ((t-x)\sqrt{\cos t}) dt \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \left(x\sqrt{\cos x} - \int_0^x \sqrt{\cos t} dt - x\sqrt{\cos x} \right) \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sqrt{\cos x} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g''(x)dx & \quad \begin{cases} u = f(x) \\ dv = g''(x) \end{cases} \implies \begin{cases} du = f'(x) \\ v = g'(x) \end{cases} & (7) \\
= \underbrace{(f(x)g'(x))\Big|_a^b}_{\circ} - \int_a^b f'(x)g'(x)dx & \quad \begin{cases} u = f'(x) \\ dv = g'(x) \end{cases} \implies \begin{cases} du = f''(x) \\ v = g(x) \end{cases} \\
= \underbrace{(-f'(x)g(x))\Big|_a^b}_{\circ} + \int_a^b f''(x)g(x)dx
\end{aligned}$$

دقت شود که چون f'' و g'' روی $[a, b]$ وجود دارد پس f' و g' روی $[a, b]$ پیوسته اند و در نتیجه کران دار هستند و fg' و $f'g$ در نقاط a و b صفر می شوند.

$$f'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (8)$$

$$\implies s(x) = \int_{\circ}^x \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{t}{a}\right)} dt = \int_{\circ}^x \cosh\left(\frac{t}{a}\right) dt = a \sinh\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_{\circ}^x = a \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

(۹) بهتر است منحنی را به صورت $x = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$ در نظر بگیریم (با توجه به $x > 0$).

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{y} \implies \text{طول قوس} = \int_{\circ}^2 \sqrt{1+y} dy = \frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\circ}^2 = \frac{14}{3}$$

(۱۰) منحنی یک نیم دایره به شعاع 10 می باشد و طول خواسته شده ربع محیط دایره است که برابر 5π می باشد.

(۱۱) دایره مقطع را $x^2 + y^2 = 1$ و قطر آن را محور x ها می گیریم. اگر صفحه عمود بر محور x ها را در نظر بگیریم،

قاعده جسم را در پاره خطی به طول y قطع می کند و چون زاویه 45° است پس مقطع صفحه مورد نظر با جسم،

مثلثی قائم الزاویه و متساوی الساقین است. بنابراین مساحت سطح مقطع برابر $A(x) = \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(1-x^2)$ است و

$$\text{حجم} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \int_{\circ}^1 (1-x^2) dx = \frac{2}{3}$$

(۱۲) نقطه برخورد دو منحنی را به دست می آوریم:

$$y = |x| \implies x = 2 - x^2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies x = 1, -2$$

$$\begin{aligned}
\text{مساحت} &= \int_{-2}^1 (\sqrt{2-x} - |x|) dx = \int_{-2}^0 (\sqrt{2-x} + x) dx + \int_0^1 (\sqrt{2-x} - x) dx \\
&= \left(-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^0 + \left(-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 \\
&= \left(-\frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{16}{3} - 2\right) + \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{4}{3}\sqrt{2}\right) = \frac{13}{6}
\end{aligned}$$

(۱۳) جسم از دوران $y = \sqrt{\sin x}$ برای $0 \leq x \leq \pi$ حول محور x ها ایجاد می شود

$$\text{حجم} = \pi \int_0^\pi y^2 dx = \pi \int_0^\pi \sin x dx = 2\pi$$

(۱۴) دقت کنید که منحنی مورد نظریک نیم‌دایره است و بنابراین تقارن موجود در شکل طول کمان AB برابر CD خواهد بود، پس k را طوری باید بیابیم که کمان‌های AB ، BC و CD با هم برابر باشند از طرفی کمان AD نیم دایره است و طول آن برابر πr است پس طول قوس‌های مورد نظر برابر $\frac{\pi}{3}r$ خواهند بود و $k = r \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$.

(۱۵) فرض کنید مختصات رئوس مثلث به‌ترتیب $(0, b)$ ، (a, b) و $(\frac{a}{2}, b + \frac{\sqrt{3}a}{2})$ باشد و محور دوران محور x ها خواهد بود. بنابراین تقارن کافی است حجم حاصل از دوران نیمه چپ مثلث را به‌دست آوریم. معادله ضلع مثلث به‌صورت $y = b + \sqrt{3}x$ است.

$$\begin{aligned} \text{حجم} &= 2\pi \int_0^{\frac{a}{2}} (y^2 - b^2) dx = 2\pi \int_0^{\frac{a}{2}} (3x^2 + 2\sqrt{3}bx) dx = 2\pi \left(x^3 + \sqrt{3}bx^2 \right) \Big|_0^{\frac{a}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} (a^3 + 2\sqrt{3}ba^2) \end{aligned}$$

(۱۶) قرار دهید $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ و $f'(x) = x^{\frac{1}{x}-x^2} (1 - \ln x)$ پس $f(x)$ در $[e, +\infty)$ نزولی و در $(0, e]$ صعودی است. پس اگر $e \leq a < b$ داریم $a^{\frac{1}{a}} = f(a) > f(b) = b^{\frac{1}{b}}$ و از آن $a^b > b^a$. همچنین اگر $0 < a < b \leq e$ داریم $a^{\frac{1}{a}} = f(a) < f(b) = b^{\frac{1}{b}}$ و از آن $a^b < b^a$.

(۱۷) قرار دهید $f(x) = a^x - x - 1$ باید نشان دهیم $f(x) \geq 0$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ اگر $a \leq 1$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ پس $a > 1$ شرط لازم است. $f(0) = 0$ و $f'(x) = a^x \ln a - 1$ برای برقراری نامساوی موردنظر باید داشته باشیم برای $x > 0$ ، $f'(x) \geq 0$ و برای $x < 0$ ، $f'(x) \leq 0$.

چون $a > 1$ پس $f'(x)$ تابعی است اکیداً صعودی بنابراین نامساوی‌ها برقرارند اگر و تنها اگر در $x = 0$ برقرار باشند (!). بنابراین $f'(0) = 0$ یعنی $\ln a - 1 = 0$ پس $a = e$.

(۱۸) اگر $0 < a \leq 1$ به سادگی دیده می‌شود که این دو منحنی یکدیگر را قطع می‌کنند (?) پس فرض کنید $a > 1$. به‌وضوح این دو منحنی در $(-\infty, 0]$ تلاقی ندارند (?). قرار دهید $f(x) = a^x - x$ اگر $f(x)$ در $(0, +\infty)$ دارای ریشه باشد آنگاه $f'(x)$ نیز دارای ریشه خواهد بود (?) که در این ریشه مقدار f نامثبت است (?). $f'(c) = a^c \ln a - 1 = 0$ پس $c = \log_a \log_a e$ و $f(c) = \log_a e - \log_a \log_a e \leq 0$ ازاینکه $a > 1$ داریم $\log_a x$ تابعی صعودی است پس $e \leq \log_a e$ و از آن $a \leq e^{(\frac{1}{e})}$. در مجموع جواب مسئله $0 < a \leq e^{(\frac{1}{e})}$ می‌باشد.

(۱۹) قرار دهید $h(x) = f(x)e^{g(x)}$ ، $h(x)$ تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر روی I است و نیز $h(a) = h(b) = 0$ از قضیه رول وجود دارد $c \in (a, b)$ که $h'(c) = 0$ یعنی $f'(c)e^{g(c)} + g'(c)f(c)e^{g(c)} = 0$ پس $e^{g(c)}(f'(c) + g'(c)f(c)) = 0$ چون $g(x)$ روی بازه I مشتق‌پذیر است و $a, b \in I$ پس روی $[a, b]$ پیوسته است و بنابراین قضیه‌ای کران‌دار است پس $e^{g(c)} \neq 0$ و حکم به‌دست می‌آید.

۲۰) قبل از محاسبه حدود توجه کنید که اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln(1 + f(x))} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x)f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x)f(x))}$$

که در آن تساوی اول از رابطه $a = e^{\ln a}$ و این که وقتی $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ پس اگر به مقدار کافی به x_0 نزدیک شویم

$1 + f(x) > 0$ ، به دست می آید. و تساوی دوم از هم ارزی $\ln(1 + x) \sim x$ وقتی $x \rightarrow 0$ به دست می آید.

تذکر: دو تابع $(1 + f(x))^{g(x)}$ و $e^{g(x)f(x)}$ در x_0 لزوماً هم ارز نیستند. (به سوال (۲۰ - س) مراجعه نمایید).

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-x}{(1+\sqrt{x})(1-x)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} = \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۲۰ - الف)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}(-2x)} = e^{-2/3} \quad (۲۰ - ب)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2x-1} \right)^{x^2} \quad (۲۰ - پ)$$

اگر $x > 10$ پس $2x-1 > 19$ پس $\frac{1}{2} < \frac{x+2}{2x-1} < \frac{2}{3}$ پس $0 < \frac{1}{2x-1} < \frac{5}{38} < \frac{1}{6}$ و چون $x^2 > 0$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2} \leq 0 \text{ و اگر } x \rightarrow +\infty \text{ داریم: } \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2} < \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2} < \left(\frac{2}{3} \right)^{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2-2} \right)^{x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{3}{x^2-2} \right)} = e^3 \quad (۲۰ - ت)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \left(\frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \left(\frac{2 \cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \sin \left(\frac{x-a}{2} \right)}{\sin a} \right) = e^{\cot a} \quad (۲۰ - ث) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \left(\frac{\tan x - \sin x}{1+\sin x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\cos x(1+\sin x)} = e^0 = 1 \quad (۲۰ - ج) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right) = e \quad (۲۰ - چ)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (x + e^x - 1) \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+e^x}{1} = e^2 \quad (۲۰ - ح)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{3x} \\ &\stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c}{3} = e^{\frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3}} = \sqrt[3]{abc} \quad (۲۰ - خ) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} + b^{x^2} - a^x - b^x}{x(a^x + b^x)} \times \frac{1}{a^x + b^x} \right) \quad (۲۰ - د)$$

کافی است حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} + b^{x^2} - a^x - b^x}{x}$ را به دست آوریم که با هویتهال داریم،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} + b^{x^2} - a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)(a^{x^2} \ln a + b^{x^2} \ln b) - a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = -\ln a - \ln b$$

و با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{a^x + b^x} = \frac{1}{2}$ داریم:

$$= e^{\frac{-\ln a - \ln b}{2}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^{-x}(e^x + 1))}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + \ln(e^x + 1)}{x} = -1 \quad (20-د)$$

20-ر) قرار دهید $\cosh x = u$ ، چون $x \rightarrow 0$ پس $u \rightarrow 1^+$ و حد مورد سوال به صورت زیر بیان می شود:

$$\lim_{u \rightarrow 1^+} \frac{\ln u}{\sqrt[m]{u} - \sqrt[n]{u}} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{u \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{u}}{\frac{1}{m}u^{\frac{1-m}{m}} - \frac{1}{n}u^{\frac{1-n}{n}}} = \frac{nm}{n-m}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \\ &\stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x^2} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (20-ز)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} &\stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right)}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x+1} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2} \\ &\stackrel{\text{Hop}}{=} e \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(1+x) - 1}{2x} \stackrel{\text{Hop}}{=} e \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{1+x}}{2} = -\frac{e}{2} \end{aligned} \quad (20-ژ)$$

20-س) با استفاده از سوال قبل

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} \right) = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\tan \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \tan \left(\frac{\pi x}{2} \right) (1-x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) \frac{(1-x)}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)}{\cos \frac{\pi x}{2}} \quad (20-ش)$$

$$\stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2}} = e^{\frac{2}{\pi}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^2} &\stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - \cos x a^{\sin x} \ln a}{2x^2} \\ &\stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln^2 a - \cos^2 x a^{\sin x} \ln^2 a + \sin x a^{\sin x} \ln a}{2x} \\ &= \frac{\ln^2 a}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - \cos^2 x a^{\sin x}}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x a^{\sin x} \ln a}{2x} \\ &\stackrel{\text{Hop}}{=} \frac{\ln a}{2} + \frac{\ln^2 a}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - \cos^2 x a^{\sin x} \ln a + 2 \cos x \sin x a^{\sin x}}{1} = \frac{\ln^2 a}{2} \end{aligned} \quad (20-ص)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{1 - e^{-x^2}}} \quad \begin{cases} x^2 = u \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow u \rightarrow 0^+ \end{cases} \\ &= \sqrt{\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u}{1 - e^{-u}}} \stackrel{\text{Hop}}{=} \sqrt{\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{-u}}} = 1 \end{aligned} \quad (20-ض)$$

21-الف) با استفاده از آزمون انتگرال کافیسیت همگرایی $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x}$ بررسی شود (برای a مناسب) اگر $u = \ln x$ داریم $du = \frac{dx}{x}$ و انتگرال فوق برابر $\int_{e^a}^{+\infty} \frac{du}{u^p}$ که این انتگرال همگراست اگر و تنها اگر $p > 1$.

21-ب) انتگرال متناظر به صورت $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln^p(\ln x)}$ است. قرار دهید $u = \ln(\ln x)$ ، $du = \frac{dx}{x \ln x}$ و انتگرال فوق برابر $\int_{e^a}^{+\infty} \frac{du}{u^p}$ که این انتگرال همگراست اگر و تنها اگر $p > 1$.

۲۱- پ) با استفاده از آزمون مقایسه داریم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n \ln n}}{\frac{1}{n \ln^p(\ln n)}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^p(\ln n)}{\ln n} = 0 \quad (?)$$

و با توجه به واگرایی $\sum \frac{1}{n \ln n}$ سری مذکور برای هر p واگراست.

$$\sum \frac{1}{n \ln n \ln(\ln^p n)} = \sum \frac{1}{pn \ln n \ln(\ln n)} = \frac{1}{p} \sum \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)} \quad (۲۱- ت)$$

و با توجه به واگرایی $\sum \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$ سری مذکور برای هر p واگراست.

۲۲- الف) داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ، از واگرایی $\sum \frac{1}{n}$ و واگرایی سری مذکور نتیجه می شود.

۲۲- ب) از آنجا که $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$ پس وجود دارد N که اگر $n > N$ آنگاه $\ln n > e^2$ پس $(\ln n)^{\ln n} > (e^2)^{\ln n} = n^2$

و $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}$ و از همگرایی $\sum \frac{1}{n^2}$ ، همگرایی سری مذکور نتیجه می شود.

۲۲- پ) با استفاده از سوال ۱۶ داریم $e^\pi < \pi^e < 1$ پس $\frac{\pi^e}{e^\pi} < 1$ پس قدرنسبت سری هندسی کوچک تر از ۱ است و همگراست.

۲۲- ت) با استفاده از آزمون انتگرال باید همگرایی انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ بررسی شود.

تابع $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ در بازه های $[k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{5\pi}{4}]$ نزولی است (?). پس اگر $x \in [k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{5\pi}{4}]$

$$f(x) \geq \frac{3}{4k\pi + 5\pi}$$

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k\pi + \frac{\pi}{4}}^{k\pi + \frac{5\pi}{4}} f(x) dx \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k\pi + \frac{\pi}{4}}^{k\pi + \frac{5\pi}{4}} \frac{3}{4k\pi + 5\pi} dx \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\pi}{4k\pi + 5\pi}$$

و از آنجا که $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4k\pi + 5\pi} = \frac{1}{4}$ و از واگرایی $\sum \frac{1}{k}$ و واگرایی سری $\sum \frac{\pi}{4k\pi + 5\pi}$ و از آن واگرایی انتگرال

$\int_1^{+\infty} f(x) dx$ و از آن واگرایی سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin n|}{n}$ حاصل می شود.