

انتگرال و کاربرد آن

سری سوم:

محمد حسین مشتاق

تهیه و تنظیم:

۱۶، ۱۷ و ۱۸

گروه‌های:

۱- انتگرال‌های نامعین زیر را محاسبه کنید.

$\int \operatorname{csch} x dx$ (ب)	$\int \operatorname{sech} x dx$ (الف)
$\int x^x (1 + \ln x) dx$ (ت)	$\int \frac{\ln x}{x(1 + \ln x)} dx$ (پ)
$\int \frac{e^{2x} + e^{3x} + e^x + 1}{e^x + 2} dx$ (ج)	$\int \frac{dx}{1 + e^x}$ (ث)
$\int x^{x+1} (\ln^2 x + \ln x) dx$ (ح)	$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ (چ)
$\int x^n \ln^m x dx$ (د)	$\int x^n e^x dx$ (خ)
$\int \operatorname{Arcsin} x dx$ (و)	$\int x^{n+1} e^{x^2} dx$ (ذ)
$\int e^{ax} \cos(bx) dx$ (ز)	$\int e^{ax} \sin(bx) dx$ (ز)
$\int \cos^4 x \sin^2 x dx$ (ش)	$\int \sin(\ln x) dx$ (س)
$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$ (ض)	$\int \sqrt{1 + \sin x} dx$ (ص)
$\int \tan^{n-1} x dx$ (ظ)	$\int \tan^{2n} x dx$ (ط)
$\int \cos^n x dx$ (غ)	$\int \sin^n x dx$ (ع)
$\int \frac{dx}{\sin^5 x}$ (ق)	$\int \frac{dx}{\cos^3 x}$ (ف)
$\int \frac{dx}{x(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$ (گ)	$\int \frac{x^2 dx}{x^2 - a^2}$ (ک)
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ (م) ($a > 0$)	$\int \frac{d\theta}{1 + \cos \theta + \sin \theta}$ (ل)
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4 + \sqrt{x})}$ (و)	$\int \frac{x\sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ (ن)
$\int \tanh x dx$ (ی)	$\int (x^2 + x^2 + x + 1)e^{x^2} dx$ (ه)

۲- انتگرال‌های معین زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & \int_0^1 x^2 \operatorname{Arctan}(x) dx \\ \text{ب)} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n x dx \\ \text{پ)} & \int_0^1 x^n \ln^m x dx \\ \text{ت)} & \int_0^2 x \sqrt{16 - x^4} dx \end{array}$$

۳- حد عبارت‌های زیر را در $n \rightarrow +\infty$ محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+k} \\ \text{ب)} & \frac{2^\alpha + 4^\alpha + \dots + (2n)^\alpha}{n^{1+\alpha}} \quad (\alpha > -1) \\ \text{پ)} & \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n}} \\ \text{ت)} & \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \prod_{k=0}^{2n} (n^2 + k^2)^{\frac{1}{n}} \\ \text{ث)} & \sum_{k=0}^n \frac{k^2 \binom{k}{n} (\sqrt[n]{2} - 1)}{n} \\ \text{ج)} & \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{(2n^2+n)} \end{array}$$

۴- همگرایی انتگرال‌های ناسره زیر را بررسی کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \\ \text{ب)} & \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx \\ \text{پ)} & \int_0^1 \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}} dx \\ \text{ت)} & \int_0^{+\infty} P(x) e^{-x^2} dx, \quad P(x) \text{ یک چندجمله‌ایست.} \end{array}$$

۵- با استفاده از سوال قبل مقدار انتگرال‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \\ \text{ب)} & \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx \end{array}$$

۶- حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x \sin t^2 dt \\ \text{ب)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x ((t-x)\sqrt{\cos t}) dt \end{array}$$

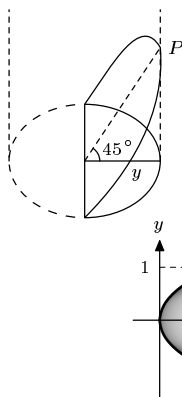
۷- اگر توابع f و g روی $[a, b]$ دارای مشتق دوم باشند و داشته باشیم $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$ آنگاه:

$$\int_a^b f(x) g''(x) dx = \int_a^b f''(x) g(x) dx$$

۸- طول قوس منحنی $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ را از نقطه $(0, a)$ تا نقطه (x, y) به دست آورید.

۹- طول قوس منحنی به معادله $4y^2 = 9x^2$ از $(0, 0)$ تا $(2\sqrt{3}, 3)$ را به دست آورید.

۱۰- طول قوس منحنی به معادله $x = \sqrt{100 - y^2}$ از $x = 10$ تا $y = 10$ را به دست آورید.

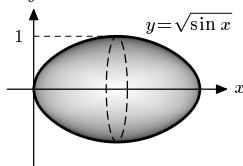


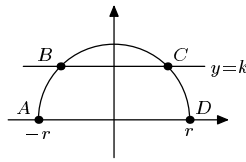
۱۱- جسم مقابل (که قسمتی از یک استوانه است) دارای قاعده نیم‌دایره به شعاع واحد بوده و

زاویه صفحه P و صفحه قاعده جسم 45° می‌باشد. حجم این جسم را به دست آورید.

۱۲- مساحت ناحیه محدود به نمودار دوتابع $y = |x|$ و $x = 2 - y^2$ چقدر است؟

۱۳- حجم جسم دوار مقابل را به دست آورید.





۱۴- اگر $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ را طوری بیابید که

طول منحنی از A تا B برابر طول منحنی از B تا C باشد.

۱۵- یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a حول یک محور موازی با قاعده آن که فاصله‌اش از قاعده برابر b است دوران می‌کند. حجم جسم حاصل را به دست آورید.

۱۶- نشان دهید اگر $a < b$ و $e \leq a$ آنگاه $a^b > b^a$.

۱۷- برای چه مقادیر مثبتی از a داریم $a^x \geq 1 + x$.

۱۸- برای چه مقادیر مثبتی از a توابع $y = a^x$ و $y = x$ یکدیگر را قطع می‌کنند.

۱۹- فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ توابعی مشتق‌پذیر روی فاصله I بوده و $a, b \in I$ و $a < b$. اگر $f(a) = f(b) = 0$ نشان دهید وجود دارد $c \in (a, b)$ به طوری که $f'(c) + g'(c)f(c) = 0$.

۲۰- حدود زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$	(ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1-2x}$
(پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}$	(ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2}$
(ث) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$	(ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$
(ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$	(ح) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$
(خ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$ ($a, b, c > 0$)	(د) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}}$ ($a, b > 0$)
(ذ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x}$	(ر) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cosh x)}{\sqrt[n]{\cosh x} - \sqrt[n]{\cosh x}}$ ($n \neq m$)
(ز) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$	(ژ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$
(س) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$	(ش) $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\tan \frac{\pi x}{2}}$
(ص) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$ ($a > 0$)	(ض) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$

۲۱- مقادیر p را طوری بیابید که سری‌های زیر همگرا باشند.

(الف) $\sum \frac{1}{n \ln^p n}$	(ب) $\sum \frac{1}{n \ln n \ln^p(\ln n)}$
(پ) $\sum \frac{1}{n \ln^p(\ln n)}$	(ت) $\sum \frac{1}{n \ln n \ln(\ln^p n)}$

۲۲- همگرایی سری‌های زیر را تحقیق کنید.

(الف) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{(1+\frac{1}{n})}}$	(ب) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$
(پ) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^{en}}{e^{\pi n}}$	(ت) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ \sin n }{n}$