

تمرین ریاضی عمومی ۱

سری پنجم (نیمسال اول ۸۴-۱۳۸۵)

• تمرینها از کتاب Stewart انتخاب شده‌اند.

صفحه ۲۳۱: ۵۷

صفحه ۲۶۲: ۵۶

صفحه ۲۸۴: ۳۵ و ۵۴.

صفحه ۲۹۴: ۱۹

صفحه ۲۹۹: ۲۷ و ۳۹.

صفحه ۳۱۲: ۹ و ۱۴.

صفحه ۳۱۳: ۲۰

تمرینهای تکمیلی

(۱) نگاشتهای $f(x) = \frac{x^2}{3}$ و $g(x) = \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$ مفروضند. نشان دهید اگر $\alpha \neq 0$ ریشه معادله $f(x) = g(x)$ باشد $1 < \alpha < 1/1$.

(۲) نگاشت مشتق‌پذیر $f: [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$ در معادله $f \circ f(x) = \sin x$ صدق می‌کند. نشان دهید f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

(۳) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ نگاشتی پیوسته و $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ هستند. نشان دهید نقطه $c \in [a, b]$ وجود دارد که

$$f(x_1) + 2f(x_2) + 3f(x_3) + \dots + nf(x_n) = \frac{1}{n}n(n+1)f(c)$$

۴) نگاشت $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته است و $f'(0) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. نشان دهید f'' حداقل در یک نقطه صفر می‌شود.

۵) نامساوی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $\frac{1}{n}(x^n + y^n) > (\frac{x+y}{2})^n$ که $x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1$

ب) $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ برای $x_i \geq 0$

۶) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ نگاشتی محدب است. نشان دهید اگر f ماکزیمم خود را در یک نقطه از (a, b) بگیرد در این صورت f نگاشتی ثابت است.

۷) فرض کنید نگاشت f دارای مشتق مرتبه دوم در فاصله (a, b) باشد و $f''(x_0) \neq 0$ که $a < x_0 < b$. ثابت کنید که در فاصله (a, b) دو مقدار x_1 و x_2 می‌توان یافت که

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0)$$