

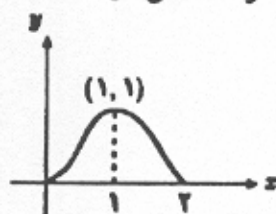
تمرین ریاضی عمومی ۱

سری اول (نیمسال اول ۸۴-۱۳۸۵)

(۱) نشان دهید برای اعداد حقیقی a و b داریم: $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

(۲) اگر نمودار منحنی $y = (x - 1)^2 - 1$ را به اندازه یک واحد به پائین و به اندازه یک واحد به سمت راست حرکت دهیم، معادله منحنی بدست آمده را بنویسید.

(۳) اگر f تابعی به قلمرو $[0, 2]$ و برد $[0, 1]$ باشد که شکل آن در زیر نشان داده شده است، نمودار توابع «الف» تا «د» و قلمرو و برد آنها را مشخص کنید:



الف) $f(-x)$ ب) $-f(x)$

ج) $f(2-x)$ د) $1 - f(1-x)$

(۴) ثابت کنید بین هر دو عدد حقیقی یک عدد گویا و یک عدد اصم وجود دارد.

(۵) اگر $0 < a < b$ ثابت کنید $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$

(۶) اگر $0 < a < b$ و h عددی باشد که $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$ ثابت کنید $a < h < b$

(۷) اگر $0 < a < b$ ثابت کنید $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$.

(۸) اگر z نقطه‌ای در صفحه مختلط باشد، شکل هندسی نواحی زیر را تعیین کنید:

ب) $\pi \leq \arg z \leq \frac{5\pi}{4}$

الف) $\arg z = \frac{\pi}{4}$

ج) $|z - 3 + 4i| \leq 5$

(۹) ثابت کنید $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

(۱۰) اگر z و w اعداد مختلط باشند، آیا همواره داریم: $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$.

(۱۱) جواب‌های مختلط معادلات زیر را بدست آورید:

ب) $z^0 + a^0 = 0$ (ب) $z^0 + a^0 = 0$ (ا عدد حقیقی مثبت)

الف) $z^2 + 1 - i\sqrt{3} = 0$

(۱۲) نشان دهید مجموع n ریشه n ام عدد یک برابر صفر است.

(۱۳) ثابت کنید:

$$\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \cdots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$$

$$\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

(۱۴) شکل هندسی مجموعه مقادیر $z \in \mathbb{C}$ که در رابطه $|\frac{z-3}{z+3}| \leq 2$ صدق می کنند را مشخص کنید.

(۱۵) برای $m = 2, 3, \dots$ ثابت کنید:

$$\sin \frac{\pi}{m} \sin \frac{2\pi}{m} \sin \frac{3\pi}{m} \cdots \sin \frac{(m-1)\pi}{m} = \frac{m}{2^{m-1}}$$

(۱۶) اگر اعداد مختلط z_1, z_2 و رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع باشند، ثابت کنید:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$

اگر مثلث متساوی الاضلاع نباشد، آیا رابطه برقرار است؟

(۱۷) تمرینات قسمت اعداد مختلط کتاب، شماره های ۱۰، ۱۲، ۱۸، ۲۴، ۲۸، ۳۲، ۳۶، ۴۰.