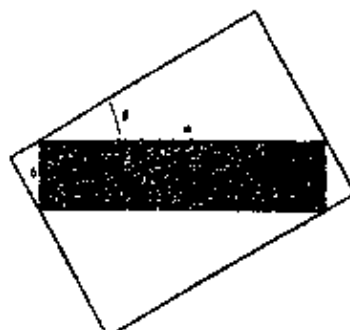




سؤال ۱. در میان تمام مستطیل‌های محیط بر مستطیلی مفروض با اضلاع a و b ، مقدار ماکزیمم مساحت چقدر

است؟



سؤال ۲. فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ تابعی ۲ بار مشتق پذیر باشد و $f(0) = f(1) = 0$. اگر f تابعی مقعر باشد (یعنی برای هر $x \in [0, 1]$ ، $f''(x) \leq 0$)، ثابت کنید طول منحنی f حداکثر برابر با ۳ است. (راهنمایی: از نامساوی $\sqrt{1+a^2} \leq 1+|a|$ که برای هر عدد حقیقی a صادق است استفاده کنید).

سؤال ۳. همگرایی انتگرال زیر را ثابت کنید. (راهنمایی: از انتگرال گیری به روش جز به جز استفاده کنید).

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

سؤال ۴. فرض کنید $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که برای هر $x \in [0, +\infty)$ داشته باشیم $(f(x))^2 = 1 + 2 \int_0^x f(t) dt$. ضابطه تابع f را به دست آورید.

سؤال ۵. حاصل انتگرال زیر را با خطای کمتر از 0.001 محاسبه کنید.

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx$$

سؤال ۶. همگرایی (مطلق یا مشروط) یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$$

سؤال ۷. مقدار سری زیر را محاسبه کنید.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{(n+3)!}$$

توزیع نمره: سؤال‌های ۲ و ۳ هر کدام ۲/۵ نمره و بقیه سؤال‌ها هر کدام ۳ نمره.

مجموع: ۲۰ نمره.